



1.

NOUVEAUX ELEMENS
DE
GEOMETRIE,

CONTENANT

Des Moyens de faire voir quelles Lignes ſont incommenſurables :

De nouvelles meſures des Angles, dont on ne s'étoit point encore aviſé : Et de nouvelles Manieres de trouver & de démontrer la proportion des Lignes ; avec de nouvelles demonſtrations des Propoſitions les plus communes.

Par Meſſrs. de PORT-ROYAL.

NOUVELLE EDITION.

Augmenté d'un nouveau Traité des Proportions, & beaucoup d'autres changemens conſiderables,





A LA HAYE,
Chez JEAN VAN DUREN, Marchand Libraire dans le Poote, près du Plyn...

M. DCCXI.



AVERTISSEMENT
Sur cette seconde Edition.



A Geometrie est d'une si grande utilité, & il est si necessaire de bien connoître les rapports qui se rencontrent entre diverses Grandeurs: qu'il est presque impossible de faire aucun progrés considerable dans les Arts liberaux, sans avoir quelque teinture de cette Science. Il seroit à desirer que l'on s'y appliquât plus qu'on ne fait, & que cette connoissance devint plus commune. Car outre l'usage continuel qu'on en peut faire dans tous les Arts avec un trés grand avantage : un Esprit Geometrique est plus juste que celui qui ne l'est pas, & beaucoup moins sujet à prendre la vrai-semblance pour la verité. C'est pourquoi l'on est redevable à ceux qui travaillent à rendre cette Science facile, & en particulier à l'Autheur; non seulement de nous avoir donné ces



nouveaux Elemens, ſans leſquels pluſieurs perſonnes n'auroient jamais eu de goût pour une connoiſſance qui demande tant d'application: mais auſſi de ce qu'il a pris la peine de les corriger, & d'y faire pluſieurs changemens conſiderables. La matiere qui y eſt traitée, principalement dans les quatre premiers Livres, eſt d'elle même ſi abſtraite, qu'il ne faut pas s'étonner ſi pluſieurs ſe ſont aiſément rebutez dés l'entrée, & s'ils ont été obligez trés ſouvent de commencer par le cinquiéme Livre. C'eſt dans le deſſein de lever cette difficulté que l'Autheur y a changé beaucoup de choſes, & qu'il a refait entierement le ſecond & le troiſiéme Livre: où il explique la nature des Raiſons & des Proportions Geometriques, ſoit ſimples, ſoit compoſées, avec beaucoup plus de netteté & d'ordre qu'il n'avoit fait dans la premiere Edition. Et l'on peut dire que la maniere dont il ſe ſert ne paroîtra pas ſi difficile à ceux qui voudront s'y appliquer un peu. Il y auroit ici aſſez de fondement de s'étendre ſur la bonté de cét Ouvrage, qui fut reçeu dés la premiere fois avec tant d'applaudiſſement. Mais il eſt plus à propos de ne point prevenir les Lecteurs; & l'on doit eſperer que l'avancement que feront dans la Geometrie ceux qui ſe ſerviront de ces Elemens, en ſera une preuve plus ſeure que tout ce qu'on en pourroit dire.

PRE-



PREFACE.

UOI que j'aye quelque forte de liberté de parler avantageufement de ces Nouveaux Elemens de Geometrie, puifque je n'y ay point d'autre part que celle de les avoir tirez des mains de l'Autheur pour les donner au Public; mon deffein n'eft pas neanmoins d'en faire voir icy l'excellence, ny de les propofer au monde comme un ouvrage fort confiderable. Je ferois plûtoft porté à diminuer l'idée trop haute que quelques perfonnes en pouvoient avoir, étant trés perfuadé qu'il eft beaucoup plus dangereux d'eftimer trop ces fortes de chofes, que de ne les pas eftimer affez.

La nature de toutes les Sciences humaines, & principalement de celles qui entrent peu dans le commerce de la vie, eft d'être mêlées d'utilitez & d'inutilitez: & je ne fçay fi l'on ne peut point dire qu'elles font toutes inutiles en elles-mêmes, & qu'elles devroient paffer pour un amufement entierement vain & indigne de perfonnes fages, fi elles ne pouvoient fervir d'inftrumens & de preparations à d'autres connoiffances vraiment utiles. Ainfi ceux qui s'y attachent pour elles-mêmes comme à quelque chofe de grand & de relevé, n'en connoiffent pas le vray ufage; & cette ignorance eft en eux un beaucoup plus grand défaut, que s'ils ignoroient abfolument ces Sciences.

Ce n'est pas un grand mal que de n'être pas Geometre; mais c'en est un considerable que de croire que la Geometrie est une chose fort estimable, & de s'estimer soy-même pour s'être rempli la teste de Lignes, d'Angles, de Cercles, de proportions. C'est une ignorance trés blâmable que de ne pas sçavoir que toutes ces speculations steriles ne contribuent rien à nous rendre heureux; qu'elles ne soulagent point nos miseres; qu'elles ne guerissent point nos maux; qu'elles ne nous peuvent donner aucun contentement réel & solide; que l'Homme n'est point fait pour cela, & que bien loin que ces Sciences lui donnent sujet de s'élever en lui-même, elles sont au contraire des preuves de la bassesse de son esprit; puisqu'il est si vain & si vuide de vray bien, qu'il est capable de s'occuper tout-entier à des choses si vaines & si inutiles.

Cependant on ne voit que trop par experience, que ces sortes de connoissances sont d'ordinaire jointes à l'ignorance de leur prix & de leur usage. On les recherche pour elles-mêmes; on s'y applique comme à des choses fort importantes; on en fait sa principale profession; on se glorifie des découvertes que l'on y fait; on croit fort obliger le monde si l'on veut bien luy en faire part; & l'on s'imagine meriter par là un rang fort considerable entre les Sçavans & les grands Esprits.

Si cét Ouvrage n'a rien de ce qui merite la reputation de grand Geometre au jugement de ces personnes, en quoy il est trés juste de les en croire; au moins on peut dire avec verité que celuy qui l'a composé est exempt du défaut de la souhaiter, & que quoy qu'il estime beaucoup le genie de plusieurs personnes qui se mêlent de cette

Science, il n'a qu'une estime trés mediocre pour la Geometrie en elle même. Neanmoins comme il est impossible de se passer absolument d'une Science qui sert de fondement à tant d'Arts necessaires à la vie humaine: il peut y avoir quelque utilité à montrer aux Hommes de quelle sorte ils en doivent user, & de leur rendre cette étude la plus avantageuse qu'il est possible.

C'est l'unique vue qu'a eüe l'Autheur de ces nouveaux Elemens. Il n'a pas tant consideré la Geometrie, que l'usage qu'on en pouvoit faire; & il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en sont pas inseparables, on s'en pouvoit trés-utilement servir pour former les jeunes gens, non seulement à la justesse de l'esprit, mais même en quelque sorte à la pieté & au reglement des mœurs.

Pour comprendre les avantages qu'on en peut tirer, il faut considerer que dans les premieres années de l'enfance, l'Âme de l'Homme est comme toute plongée & toute ensevelie dans les sens, & qu'elle n'a que des perçeptions obscures & confuses des objets qui font impression sur son corps. Elle sort à la verité de cét état à mesure que ses organes se dégagent & se fortifient par l'âge, & elle acquiert quelque liberté de former des pensées plus claires & plus distinctes, & même de les tirer les unes des autres, ce que l'on appelle raisonnement. Mais l'amour des choses sensibles & exterieures lui étant devenu comme naturel, & par la corruption de son origine & par l'accoûtumance qu'elle a contractée durant l'enfance: les choses exterieures sont toûjours le principal objet de son plaisir & de sa pente. Ainsi non seulement les jeunes

gens ne se plaisent gueres que dans les choses sensuelles ; mais même entre les personnes avancées en âge il y en a peu qui soient capables de trouver du goust dans une verité purement spirituelle , & où les sens n'ayent aucune part. Toute leur application est toûjours aux manieres agreables ; ils n'ont de l'intelligence & de la delicatesse que pour cela, & ils ne se servent de leur esprit que pour étudier l'agréement & l'art de plaire, par les choses qui flatent la concupiscence & les sens

Il me seroit aisé de montrer que cette disposition d'esprit est non seulement un trés grand défaut ; mais que c'est la source des plus grands desordres & des plus grands vices. Il est vray qu'il n'y a que la Grace & les exercices de pieté qui puissent la guerir veritablement : mais entre les exercices humains qui peuvent le plus servir à la diminuer, & à disposer même l'Esprit à recevoir les veritez Chrêtiennes avec moins d'opposition & de dégoust, il semble qu'il n'y en ait gueres de plus propre que l'étude de la Geometrie. Car rien n'est plus capable de détacher l'Ame de cette application aux sens, qu'une autre application à un objet qui n'a rien d'agreable selon les sens ; & c'est ce qui se rencontre parfaitement dans cette Science. Elle n'a rien du tout qui puisse favoriser tant soit peu la pente de l'Ame vers les sens ; son objet n'a aucune liaison avec la concupiscence ; elle est incapable d'éloquence & d'agréement dans le langage ; rien n'y excite les passions ; elle n'a rien du tout d'aimable que la verité, & elle la presente à l'Ame toute nuë & détachée de tout ce que l'on aime le plus dans les autres choses.

Que

Que si les veritez qu'elle propose ne sont pas fort utiles ny fort importantes, si l'on en demeuroit là ; il est neanmoins trés utile & trés important de s'accoûtumer à aimer la verité, à la gouster, à en sentir la beauté. Et Dieu se sert souvent de cette disposition d'esprit, pour nous faire entrer dans l'amour & dans la pratique des veritez qui conduisent au salut, pour nous faire voir l'illusion de tout ce qui plaist dans les choses sensibles & exterieures, & pour nous rendre justes & équitables dans toute la conduite de nôtre vie ; cét esprit d'équité consistant principalement dans le discernement & dans l'amour de la verité en toutes les affaires que nous traitons.

Mais la Geometrie ne sert pas seulement à détacher l'Esprit des choses sensibles, & à inspirer le goust de la verité ; elle apprend aussi à la reconnoistre & à ne se laisser pas tromper par quantité de maximes obscures & incertaines, qui servent de principes aux faux raisonnemens dont les discours des Hommes sont tout remplis. Car si l'on y prend garde, ce qui nous jette ordinairement dans l'erreur & nous fait prendre le faux pour le vray, n'est pas le défaut de la liaison des consequences avec les principes, en quoy consiste ce qu'on appelle la forme des argumens ; mais c'est l'obscurité des principes mêmes, qui n'étant pas exactement vrais, & n'étant pas aussi évidemment faux, presentent à l'Esprit une lumiere confuse où la verité & la fausseté sont mêlées ; ce qui cause à plusieurs un espece d'éblouïssement qui leur fait approuver ces principes sans les examiner davantage.

Il est vray que la Logique nous donne deux ex-

excellentes regles pour éviter cette illusion, qui sont de définir tous les mots équivoques, & de ne recevoir jamais que des principes clairs & certains. Mais ces regles ne suffisent pas pour nous garantir d'erreur. Premierement, parce qu'on se trompe souvent dans la notion même de l'évidence, en prenant pour évident ce qui ne l'est pas. Et en second lieu, parce que quoy qu'on sçache ces regles, on n'est pas toûjours appliqué à les pratiquer. Il n'y a donc que la Geometrie qui remedie en effet à l'un & à l'autre de ces défauts. Car d'une part en fournissant des principes vraiment clairs, elle nous donne le modelle de la clarté & de l'évidence pour discerner ceux qui l'ont de ceux qui ne l ont pas: & de l'autre, comme elle ne se dispense jamais de l'observation de ces deux regles, elle accoûtume l'Esprit à les pratiquer, & à être toûjours en garde contre les équivoques des mots & contre les principes confus, qui sont les deux sources les plus communes des mauvais raisonnemens.

Il ne faut pas dissimuler neanmoins, que cette coûtume même de rejetter tout ce qui n'est pas entierement clair, peut engager dans un défaut trés considerable, qui est de vouloir pratiquer cette exactitude en toute sorte de matieres, & de contredire tout ce qui n'est pas proposé avec l'évidence Geometrique. Cependant il y a une infinité de choses dont on ne doit pas juger en cette maniere, & qui ne peuvent pas être reduites à des demonstrations methodiques. Et la raison en est, qu'elles ne dépendent pas d'un certain nombre de principes grossiers & certains, comme les veritez Mathematiques; mais d'un grand nombre de preuves & de circonstan-

ces

ces qu'il faut que l'Esprit voye tout dun coup, & qui n'étant pas convainquantes separément, ne laissent pas de persuader avec raison, lors qu'elles sont jointes & unies ensemble. La plupart des matieres morales & humaines sont de ce nombre; & il y a même des veritez de la Religion qui se prouvent beaucoup mieux par la lumiere de plusieurs principes qui s'entr'aident & se soûtiennent les uns les autres, que par des raisonnemens semblables aux demonstrations Geometriques.

C'est donc sans doute un fort grand défaut que de ne faire pas distinction des matieres; d'exiger par tout cette suite methodique de propositions que l'on voit dans la Geometrie; de faire difficulté sur tout, & de croire avoir droit de rejetter absolument un principe, lors qu'on juge qu'il peut recevoir quelque exception en quelque rencontre.

Mais si ce défaut est assez ordinaire à quelques Geometres, il ne naist pas neanmoins de la Geometrie même. Cette Science étant toute veritable ne peut pas authoriser une conduite qui n'est fondée que sur des principes d'erreur. Car il n'est pas vray qu'un principe qui ne prouve pas absolument ne prouve rien; & que ne prouvant pas tout-seul, il ne prouve pas étant joint à d'autres. Il y a differens degrez de preuves. Il y en a dont on conclud la certitude, & d'autres dont on conclud l'apparence; & de plusieurs apparences jointes ensemble on conclud quelquefois une certitude à laquelle tous les Esprits raisonnables se doivent rendre. Il n'est pas absolument certain que l'on doive voir le Soleil quelqu'un des jours de l'Année qui vient, je le dois neanmoins croi-

re ; & je ferois ridicule d'en douter, quoy qu'il foit impoffible de le démontrer. La Raifon ne doit donc pas prétendre de démontrer Geometriquement ces chofes ; mais elle peut prouver Geometriquement que c'eft une fottife de ne les pas croire : & c'eft en cette maniere qu'on fe peut fervir de la Geometrie même dans ces fortes de matieres, pour faire voir plus clairement la force de la vrai-femblance qui nous les doit faire croire.

Outre ces utilitez que l'on peut tirer de la Geometrie, on en peut encore remarquer deux autres qui ne font pas moins confiderables. Il y a des veritez importantes pour la conduite de la vie & pour le falut, qui ne laiffent pas d'être difficiles à comprendre, & qui ont befoin d'une attention pênible ; Dieu ayant voulu, comme dit S. Auguftin, que le pain de l'Ame fe gagnaft avec quelque forte de travail auffi bien que le pain du Corps. Et il arrive de là que plufieurs perfonnes s'en rebutent par une certaine pareffe, ou plûtoft par une delicateffe d'efprit qui leur donne du dégouft de tout ce qui demande quelque effort & quelque forte de contention. Or l'étude de la Geometrie eft encore un remede à ce défaut ; car en appliquant l'Efprit à des veritez abftraites & difficiles, elle lui rend faciles toutes celles qui demandent moins d'application ; comme en accoûtumant le corps à porter des fardeaux pezans, on fait qu'il ne fent prefque plus le poids de ceux qui font plus legers.

Non feulement elle ouvre l'Efprit & le fortifie pour concevoir tout avec moins de peine ; mais elle fait auffi qu'il devient plus éten-
du

du & plus capable de comprendre plusieurs choses à la fois. Car les veritez Geometriques ont cela de propre qu'elles dépendent d'un long enchaînement de principes qu'il faut suivre pour arriver à la conclusion ; & comme cette conclusion tire sa lumiere de ces principes, il faut que l'Esprit voye en même temps, & ce qui éclaire & ce qui est éclairé : ce qu'il ne peut faire sans s'étendre , & sans porter sa veuë plus loin que dans ses actions ordinaires.

Cette étenduë d'esprit , qui paroist dans la Geometrie , est non seulement trés - utile pour tous les sujets qui ont besoin de raisonnement : mais elle est aussi trés admirable en elle-même ; & il n'y a gueres de qualité de nôtre Ame qui en fasse mieux voir la grandeur , & qui détruise davantage les imaginations basses & grossieres de ceux qui voudroient la faire passer pour une matiere. Car le moyen de s'imaginer qu'un Corps, c'est à dire, un Estre où nous ne concevons qu'une étenduë figurée & mobile , puisse penetrer ce grand nombre de principes tout spirituels qu'il faut lier ensemble pour la preuve des propositions que la Geometrie nous démontre, & qu'il porte même sa veuë jusques dans l'Infiny pour en asseurer ou en tirer plusieurs choses avec une certitude entiere ? Elle nous fait voir par exemple , que la Diagonale & le côté d'un Quarré n'ont nulle mesure commune ; c'est à dire , que l'Esprit voit que dans l'infinité des parties de differente grandeur qu'on y peut choisir, il n'y en a aucune qui puisse mesurer exactement l'une & l'autre de ces deux lignes.

On peut dire que toutes les propositions Geometriques sont de même infinies en étenduë; parce que l'on n'y conclud pas ce qu'on démontre d'une seule Ligne, d'un seul Angle, d'un seul Cercle, d'un seul Triangle: mais de toutes les Lignes, de tous les Angles, de tous les Cercles, de tous les Triangles; & qu'ainsi l'Esprit les renferme & les comprend tous en quelque sorte, quelque infinis qu'ils soient. Or que tout cela se puisse faire par le bouleversement d'une matiere, & qu'en la remuant elle devienne capable de comprendre des objets spirituels, & d'en comprendre même une infinité: c'est ce que personne ne sçauroit croire ny penser, pourvû qu'il veüille de bonne foy songer à ce qu'il dit.

Ce sont ces reflexions qui ont fait juger à l'Autheur de ces Elemens, qu'on pouvoit faire un bon usage de la Goemetrie; mais ce n'est pas neanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puisqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traitent. Ils portent tous à aimer la verité; ils apprennent à la discerner; ils fortifient la Raison; ils étendent la veuë de l'Esprit, & ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'Ame de l Homme, & de reconnoistre qu'elle ne peut être autre que spirituelle & immortelle.

Ce qui lui a donc fait croire qu'il étoit utile de donner une nouvelle forme à cette Science, est, qu'étant persuadé que c'étoit une chose fort avantageuse de s'accoûtumer à reduire ses pensées à un ordre naturel, cét ordre étant comme une lumiere qui les éclaircit toutes les unes par les autres: il a toûjours eu quelque peine

peine de ce que les Elemens d'Euclide étoient tellement confus & broüillez, que bien loin de pouvoir donner à l'Esprit l'idée & le goust du veritable ordre, ils ne pouvoient au contraire que l'accoûtumer au desordre & à la confusion.

Ce défaut lui paroissoit considerable dans une Science dont la principale utilité est de perfectionner la Raison ; mais il n'eust pas pensé neanmoins à y remedier, sans la rencontre que je vai dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands Esprits de ce siecle, & des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques, avoit fait en quelques jours un Essay d'Elemens de Geometrie ; & comme il n'avoit pas cette veuë de l'ordre, il s'étoit contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide, pour en substituer d'autres plus nettes & plus naturelles. Ce petit Ouvrage étant tombé entre les mains de celuy qui a depuis composé ces Elemens, il s'étonna qu'un si grand Esprit n'eust pas été frappé de la confusion qu'il avoit laissée pour ce qui est de la methode, & cette pensée luy ouvrit en même temps une maniere naturelle de disposer toute la Geometrie ; les démonstrations s'arrangerent d'elles mêmes dans son Esprit, & tout le corps de l'Ouvrage que nous donnons maintenant au Public se forma dans son idée.

Cela luy fit dire en riant à quelques-uns de ses amis, que s'il avoit le loisir, il luy seroit facile de faire des Elemens de Geometrie mieux ordonnez que ceux que l'on luy avoit montrez ; mais ce n'étoit encore qu'un projet

en

en l'air qu'il avoit peu d'esperance de pouvoir executer, quoi que quelques personnes l'en priassent; parce qu'il auroit fait scrupule d'y employer un temps où il auroit été en état de faire quelqu'autre chose.

Il est arrivé neanmoins depuis que diverses rencontres luy ont donné le loisir dont il avoit besoin pour cela. Il fut une fois obligé par une indisposition de quitter ses occupations ordinaires, & il trouva son soulagement en se déchargeant d'une partie de ce qu'il avoit dans l'Esprit sur cette matiere. Une autrefois il se trouva quatre ou cinq jours dans une maison de Campagne sans aucun livre, & il remplit encore ce vuide en composant quelque partie de ce Traité. Enfin en ménageant ainsi quelques petits temps, il a achevé ce qu'il avoit dessein de faire de cét Ouvrage, s'étant borné d'abord à la Geometrie des Plans, comme pouvant suffire au commun du monde.

Quelques personnes se sont étonnez qu'en écrivant d'une matiere si étenduë, & qui a été traitée par un si grand nombre d'habiles gens, il ne leût pour cela aucun livre de Geometrie, n'en ayant point même dans sa Bibliotheque: mais il leur répondoit, que l'ordre le conduisoit tellement, qu'il ne croyoit pas pouvoir rien oublier de considerable. Il ajoûtoit même que cét ordre ne servoit pas seulement à faciliter l'intelligence & à soulager la memoire: mais qu'il donnoit lieu de trouver des principes plus feconds, & des demonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire. Et en effet il n'y a presque dans ces nouveaux Elemens

mens que des démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui y sont établis, & qui comprennent un assez grand nombre de nouvelles propositions.

On voit assez par là qu'il n'étoit pas fort difficile à l'Autheur de la nouvelle Logique ou Art de penser, qui avoit veu quelque chose de cette Geometrie, de remarquer, comme il a fait dans la IV.[e] Partie, les défauts de la methode d'Euclide, & d'avancer qu'on pourroit digerer *la* Geometrie dans un meilleur ordre. C'étoit deviner les choses passées. Mais cette avance qu'il avoit faite, sans se hazarder beaucoup, a depuis servi d'engagement à produire ce petit Ouvrage, à quoy l'on n'auroit peut-être jamais pensé. Car tant de personnes ont demandé au Libraire une nouvelle Geometrie, qu'on n'a pas pû la refuser aux instances qu'il a faites de leur part pour l'obtenir, n'étant pas juste de se faire beaucoup prier pour si peu de chose.

On s'est donc resolu de la donner au Public, & de le rendre juge de l'utilité qu'on en peut tirer. On croit seulement devoir avertir le monde qu'il y aura peut-être quelques personnes qui pourront trouver les IV. premiers Livres un peu difficiles, parce qu'on s'y est servi de démonstrations d'Algebre, auxquelles on a quelque peine d'abord à s'accoûtumer. La raison qui a obligé d'en user ainsi, est, que traitant des Grandeurs en general, entant que ce mot comprend toutes les especes de quantité, on ne pouvoit pas se servir de figures pour aider l'Imagination; outre que l'on jugeoit qu'il étoit utile de se rompre d'abord à cette methode,

de, qui eſt la plus feconde & la plus Geometrique ; mais ceux neanmoins à qui elle feroit trop de peine ont moyen de s'en exempter, en commençant par le Ve Livre, & en ſuppoſant prouvées quelques Propoſitions qui dépendent des quatre premiers. Ce remede eſt aiſé ; & il ne les privera pas du fruit qu'ils pourront tirer de la methode de ces Elemens, lors qu'en une ſeconde lecture ils les liront tous de ſuite.

Pour les autres jugemens qu'on peut faire de cét Ouvrage, comme il eſt facile de les prévoir, il ſemble auſſi qu'on n'ait pas ſujet de s'en mettre en peine. Car s'il ſe trouve des perſonnes qui le mépriſent par des principes plus élevez, & par un éloignement de toutes ces ſortes de ſciences, peut-être ne feront-ils pas fort éloignez du ſentiment de l'Autheur. S'il y en a qui le blâment comme Geometres en y remarquant de veritables fautes, ils feront encore d'accord avec lui, parce qu'il ſera toûjours tout-preſt de les corriger. Enfin ceux qui le reprendront comme Geometres, mais en ſe trompant, ne peuvent pas lui être fort incommodes, parce que c'eſt une matiere où les veritez ſont ſi claires, qu'elles n'ont gueres beſoin d'apologie contre les injuſtes accuſations.

DE-

DEFINITIONS DE QUELQUES mots dont on s'est servi dans ces Elemens sans les definir, parce qu'ils sont plû-tôt de Logique que de Geometrie.

AXIOME. On appelle ainsi une proposition si claire qu'elle n'a pas besoin de preuve : comme, *Que le tout est plus grand que sa partie.* Voiez la Logique IV. Part. Chap. VI.

DEMANDE. On se sert de ce mot quand on a quelque chose à faire, qui est si facile qu'on n'a pas besoin de preuve pour démontrer qu'on a fait ce que l'on vouloit faire : comme, *Décrire un Cercle d'un intervalle donné.*

DEFINITION. Ce qu'on appelle de ce nom en Geometrie, est la determination d'un mot qui pourroit former diverses idées, à une idée si claire & si distincte, qu'elle revienne toûjours dans l'Esprit lorsqu'on se sert de ce mot : comme, *On appelle Parallelogramme une figure dont les côtez opposez sont paralleles.* Voyez l'Art de penser. I. Part. Chap. XI.

THEORÉME. On nomme ainsi une proposition dont il faut démontrer la verité : comme, *que le quarré de la base d'un Angle droit est égal aux quarrez des deux côtez.*

PROBLEME. C'est aussi une proposition qu'il faut démontrer ; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire : comme, *Faire passer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.*

LEMME.

Lemme. C'eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt, que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent. On en peut voir des exemples au commencement des Livres VI. X. & XI.

Corollaire. C'eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre precedente; on en peut voir un grand nombre dans le Livre IX.

Mais il faut remarquer, que pour mieux faire voir la dependance qu'avoient pluſieurs propoſitions d'une ſeule qui en étoit comme le principe & le fondement, on a quelquefois mis en Corollaire ce qu'on auroit pû mettre en Theoréme, ſi on avoit voulu.

Et pour la même raiſon, il y a de certains Theorémes à qui on a donné le nom de *Propoſition fondamentale*; parce que toutes les Propoſitions d'une certaine matiere en dépendent. On en peut voir des exemples dans les Livres **VI. VIII. X. XI.**

Explication de quelques Notes.

Quoi que ces Notes ſoient expliquées chacune en ſon lieu: neanmoins on a crû les devoir encore mettre ici, afin de les faire mieux entendre.

$+$ *Plus*; ainſi $9+3$, c'eſt à dire, neuf plus trois.

$-$ *Moins*; ainſi $14-2$, c'eſt à dire, quatorze moins deux.

$=$ *Marque de l'égalité*; ainſi $9+3 = 14-2$, c'eſt à dire, neuf plus trois eſt égal à quatorze moins deux.

: : Ces quatre points entre deux termes devant,

vant, & deux termes aprés, marquent que ces quatre termes sont proportionels ou Arithmetiquement, ou Geometriquement.

Ainsi, Arithmetiquement, 7. 3. :: 13. 9.
Et Geometriquement, 6. 2. :: 12. 4.

∺ Ces mêmes quatre points avec une ligne qui les coupe, marquent la Proportion continuë; ainsi ∺ 3. 9. 27. c'est à dire, 3 est à 9: comme 9 est à 27.

Deux lettres ensemble comme *bd*, marquent quelquefois une Grandeur de deux dimensions, comme un *Plan* dont la longueur soit *b* & la largeur *d*. Mais d'autres fois ce n'est qu'une ligne dont ces deux lettres marquent les deux extremitez; ce qu'il est aisé de discerner par le sujet que l'on traite.

Les Livres sont divisez en Nombres par des chiffres qui sont en marge: & c'est seulement à cela qu'on a égard dans les citations & les renvois à quelques points des Livres precedens; le premier chiffre, qui est Romain marquant le Livre; & le second qui est Arabe, marquant le Nombre de ce Livre. Ainsi V. 29. veut dire *le vingt-neuviéme Nombre du Livre cinquiéme.*

Que si l'endroit où l'on renvoie est du même Livre, on cite quelquefois un tel Theorême, ou un tel Lemme, ou bien le Nombre precedent avec cette marque S. qui veut dire *suprà*; comme S. 15. c'est à dire, *cy-dessus, Nombre* 15.

TA-

TABLE

De ce qui est traité dans chaque Livre.

On pourroit dire beaucoup de choses sur l'ordre qu'on a suivi dans ces Elemens, & pour faire voir qu'il est beaucoup plus naturel qu'aucun autre ait jamais observé dans ces matieres. Mais on aime mieux en laisser le jugement à ceux qui les liront, & l'on se contente d'en representer le plan, en faisant voir de suite ce qui est traité dans chaque Livre.

LI-

AVER-

AVERTISSEMENT

Sur cette nouvelle Edition.

LA seconde Edition de Paris, qui est la derniere, & sur laquelle on a fait celle-ci, est si vitieuse, qu'on y a compté plusieurs centaines de fautes essentielles; & entr'autres un grand nombre de citations fausses. On a donc pris soin de tout corriger: on a même éclairci certains endroits qui sembloient un peu obscurs & ajoûté les figures qui manquoient. Cependant quelque précaution que l'on y ait apportée, on n'a pû si bien faire, qu'il n'ait échapé aussi les fautes suivantes.

FAUTES A' CORRIGER.

Pag. 31. lign. 9. Raison (lisez) Grandeur
Pag. 40. lign. 8. $\frac{D}{B}$ (lisez) $\frac{B}{D}$
Pag. 73. lign. 3. N. 47. (lisez) II. 47.
Pag. 76. lign. 15. de $\frac{cn}{bm}$, (lisez) de $\frac{cm}{bn}$,
Pag. 84. lign. 15. $\frac{9}{4}. :: \frac{3}{2}. \frac{5}{18}.$ (lisez) $\frac{5}{4}. :: \frac{3}{2}. \frac{15}{8}.$
Pag. 88. lign. 3. :: *b. c.* (lisez) :: *b. c*; & *b c.*
Pag. 140. lign. penult. membre l'équation (lisez) membre de l'équation
Pag. 185. lign. 26. (par le 6.e Lemme.) lisez (par la 2.de Proposition.)

NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

DES GRANDEURS EN GENERAL, ET DES QUATRE OPERATIONS,

Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer, entant qu'elles ſe peuvent appliquer à toutes ſortes de grandeurs.

SUPPOSITIONS GENERALES.

TOUTES les Sciences ſuppoſent des connoiſſances naturelles, & elles ne conſiſtent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous ſçavons naturellement.

AINSI *quoi qu'il ſemble que ce ſoit contre le*

vrai ordre des ſciences de ſuppoſer dans les ſuperieures, ce qui ne ſe doit traiter que dans les inferieures, comme qui ſuppoſeroit dans la Geometrie, ce qui ne s'apprendroit que dans l'Aſtronomie; neanmoins ce n'eſt point contre cét ordre que de ſuppoſer dans une ſcience ſuperieure ce qui regarde l'objet de l'inferieure, lors que nous ne ſuppoſons que ce qui ſe peut ſçavoir par la ſeule lumiere naturelle ſans l'aide d'aucune ſcience.

C'EST POURQUOI *aiant entrepris de traiter icy de la quantité ou grandeur en general, entant que ce mot comprend l'étenduë, le nombre, le temps, les degrez de vîteſſe, & generallement tout ce qui ſe peut augmenter en ajoûtant ou multipliant; & diminuer en ſouſtraiant ou diviſant, &c. je ne ferai point de difficulté de ſuppoſer qu'on ſçait de certaines choſes qui ſemblent appartenir à la ſcience des nombres qu'on appelle* Arithmetique, *ou à la ſcience de l'étenduë qu'on appelle* Geometrie; *parce que je ne ſuppoſerai rien qu'on ne puiſſe ſçavoir ſans l'aide de l'Arithmetique ou de la Geometrie pour peu d'attention qu'on y faſſe, ou qu'on y ait déja fait.*

PREMIERE SUPPOSITION.

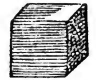
II. JE ſuppoſe donc premierement qu'on ſçache ajoûter & multiplier de petits nombres, comme que 4 & 5 font 9, que 3 fois 5 font 15, &c.

SECONDE SUPPOSITION.

III. SECONDEMENT qu'on ſçache que c'eſt la même choſe dans la multiplication de commencer par lequel on veut des deux nombres que l'on multiplie: comme que 3 fois 5 eſt la même choſe que 5 fois 3; que 4 fois 6 eſt la même choſe que 6 fois 4.

TROISIÉME SUPPOSITION.

Je suppose en troisiéme lieu, que l'on sçache que ce qu'on appelle corps, espace, étenduë, IV.
(car tout cela signifie la même chose) a trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur. Et que quand on les considere toutes trois, c'est alors que cette sorte de grandeur s'appelle proprement *Corps* ou *Solide*. Que quand on n'en considere que deux, sçavoir la longueur & la largeur, on l'appelle alors *Surface*. Et que quand on n'en considere qu'une, sçavoir la longueur, on l'appelle alors *Ligne*.





QUATRIÉME SUPPOSITION.

Je suppose en quatriéme lieu, que la multiplication & la division se peuvent appliquer à toutes V.
grandeurs, & non seulement aux nombres. Car par exemple dans l'étenduë on appelle multiplier la longueur par la largeur, lors qu'aiant un morceau de terre de 4 perches de longueur & 3 de largeur, on dit que ce morceau de terre a 12 perches de surface. Et au contraire; on appelle diviser, lors que sçachant par exemple quel est le contenu d'un morceau de terre, comme qu'il est de 12 perches, & sçachant aussi quelle en est la longueur, comme de 4 perches, on en cherche la largeur qui se trouvera étre de 3 perches. On pourroit encore donner une autre notion de la multiplication & de la division par rapport à l'unité; mais celle-là suffit pour ce que nous avons à faire, & l'autre ne se pourroit bien expliquer qu'en supposant des choses dont nous ne parlerons que dans la suite.

3

4

Cinquiéme Supposition.

VI. Je suppose en cinquiéme lieu, que l'on se puisse mettre dans l'esprit que ce qu'on appelle les trois dimensions dans les corps s'applique par accommodation à toutes les autres grandeurs, & même aux nombres.

Car on les considere quelquefois comme n'aiant qu'une dimension, lors qu'on ne suppose point qu'on les ait multipliez par une autre grandeur. Et alors on les peut appeller grandeurs lineaires : comme est par exemple le nombre de 7, qu'on ne considere que comme étant composé de sept unitez.

Et quelquefois on les considere comme aiant deux dimensions, lors qu'on suppose qu'une grandeur est née de la multiplication de deux lineaires; & alors on les peut appeller *grandeurs planes*. Comme est par exemple le nombre de 12, lors qu'on le considere comme étant né de la multiplication de 3 par 4.

Et enfin on les considere comme aiant trois dimensions, lors qu'on suppose qu'une grandeur est née de la multiplication de trois grandeurs lineaires, ou d'une plane qui en a déja deux, par une lineaire. Et alors on peut appeller ces grandeurs *solides*. Comme est par exemple le nombre de 24, quand on le considere comme né de la multiplication de ces trois nombres 2, 3, 4; parceque 2 fois 3 font 6, & 4 fois 6 font 24.

Sixié-

Sixiéme Supposition.

Je suppose enfin qu'on s'accoûtume à concevoir generalement les choses en les marquant par des lettres sans se mettre en peine de ce qu'elles signifient, puis qu'on ne s'en sert que pour conclure que *b* est *b*, que *c* est *c*: ou (ce qui est pris pour la même chose en matiere de grandeurs sur tout en general) que *b* est égal à *b*, & *c* à *c*: ou que *b* multiplié par *c* est égal à *b* multiplié par *c*, ou, selon la 2.e Supposition, à *c* multiplié par *b*. VII.

Cette *remarque est de grande importance. Car on ne feroit que se broüiller, si dans ces commencemens, qui doivent être tres-simples, on vouloit appliquer ce qu'on traite generalement à des exemples particuliers dont la connoissance dépendroit d'autres principes. Et de plus, l'une des plus grandes utilitez de ce traitté, est d'accoûtumer l'esprit à concevoir les choses d'une maniere spirituelle sans l'aide d'aucunes images sensibles, ce qui sert beaucoup à nous rendre capables de la connoissance de Dieu & de nôtre ame.*

PRINCIPES GENERAUX.

Du Tout et des Parties.

Toute grandeur est considerée comme divisible en ses parties. VIII.

La grandeur est appellée *tout* au regard de ses parties. IX.

Lors qu'une partie de la grandeur est contenuë precisément tant de fois dans son tout, comme 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c. elle s'appelle *partie aliquote*, ou simplement *aliquote*. X.

On dit aussi qu'elle en est *la mesure*; parce qu'elle la mesure justement étant prise autant de fois qu'il faut. XI.

Ainsi 3 est partie aliquote de 9, parce qu'il y est trois fois; 5, partie aliquote de 20, parce qu'il y est 4 fois.

XII. Quand les parties aliquotes d'une grandeur sont autant de fois dans leur tout que les parties aliquotes d'une autre grandeur dans le leur, elles sont appellées *aliquotes pareilles*. Ainsi 3 & 4, sont les aliquotes pareilles de 9 & de 12; parce que 3 est autant de fois dans 9, que 4 dans 12, l'un & l'autre y étant 3 fois.

XIII. Le tout est mesure à soi-même, parce que toute grandeur est contenuë une fois dans soi-même.

XIV. On appelle *portion* toute partie aliquote ou non aliquote. Ainsi 4 est une portion de 13; 5 de 7.

AXIOMES.

De l'Egalité et Inégalité.

XV. Le tout est plus grand que sa partie.

XVI. Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

XVII. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entr'elles.

XVIII. Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous sont égaux.

XIX. Si de grandeurs égales on en oste d'égales, les restes seront égaux.

XX. Si de grandeurs inégales on en oste d'égales, les restes seront inégaux.

XXI. Si à grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les tous seront inégaux.

XXII. Les aliquotes pareilles de grandeurs égales sont égales. Par exemple, si b est égal à c, le tiers de b sera égal au tiers de c, cela est manifeste.

XXIII. Et par la même raison deux grandeurs sont éga-les

les quand leurs aliquotes pareilles sont égales. Si le tiers de *b* est égal au tiers de *c*, *b* est égal à *c*; car *b* est égal à ses trois tiers, & *c* aux trois siens. Or si un tiers est égal à un tiers, les trois tiers sont égaux aux trois tiers : puis que ce n'est qu'ajoûter choses égales à choses égales. Donc &c.

On peut marquer ainsi qu'une grandeur est égale à une autre, comme que *b* est égal à *c*, $b = c$. XXIV.

DES QUATRE OPERATIONS, AJOUTER, &c.

Addition.

Ajoûter, ou *Addition*, c'est mettre deux ou plusieurs grandeurs ensemble, & en faire comme un tout qui s'appelle *somme*. XXV.

Cela s'exprime ainsi *b* plus *c*, & se marque ainsi $b + c$.

Soustraction.

Soustraire, ou *Soustraction*, c'est retrancher une moindre grandeur d'une plus grande. Et ce qui resulte de là s'appelle *reste* ou *difference*. Car ce qui reste de la plus grande est ce en quoi la plus grande surpassoit la plus petite. Si de 5 je retranche 3, reste 2, & 2 est la difference de 5 à 3. XXVI.

La Soustraction s'exprime ainsi, *b* moins *c*, & se marque ainsi $b - c$.

Multiplication.

Multiplier ou *Multiplication*, c'est quand aiant deux grandeurs comme *b* & *c*, je fais que ce que l'unité est à l'une des deux, l'autre l'est à ce qui XXVII.

 resulte

refulte de la Multiplication, qu'on appelle *produit.*

Une toiſe eſt à 3 toiſes, ce que 4 toiſes ſont à 12; Et ainſi 12 toiſes eſt le *produit* de 3 toiſes multipliées par 4.

XXVIII. Cela s'exprime ainſi quand on ne ſe ſert que de lettres, *b* en *c*, ou *b* par *c*; Il y en a qui le marquent ainſi *b* ⋈ *c*; mais il eſt plus court de les mettre ſeulement enſemble *b c*, & nous ne nous ſervirons que de ce dernier.

Il faut remarquer qu'une grandeur marquée par un ſeul caractere comme *b*, ou *c*, s'appelle grandeur lineaire, ſelon la 5e Suppoſition. Que quand on les joint enſemble en mettant *b c*, cela ne veut pas dire que l'une ſoit ajoûtée à l'autre (ce qu'il faudroit marquer par *b* + *c*, *b* plus *c*,) mais que l'une eſt multipliée par l'autre, d'où naiſt ce qu'on appelle *produit.*

XXIX. Que s'il ny a eu que deux grandeurs lineaires qui aient été multiplées l'une par l'autre, ce produit s'appelle *grandeur plane* ou *plan.*

XXX. Et les deux grandeurs lineaires d'où ce plan a été produit, s'appellent *ſes deux dimenſions*, ou *ſes deux côtez.*

XXXI. Et ſi c'eſt la même grandeur lineaire qui a été multipliée par ſoi-même, comme ſi *b* en *b* a fait *b b*, ce plan s'appelle *quarré.* Et cette grandeur lineaire *ſa racine.* On marque quelquefois le quarré ainſi *bq.* c'eſt à dire *b* quarré ou *b2.* c'eſt à dire *b* de deux dimenſions.

XXXII. Que ſi trois grandeurs lineaires ſont multipliées l'une par l'autre, comme *b* en *c*, & *b c* en *d*, ce qui fait *b c d*: ou (ce qui eſt la même choſe) ſi une grandeur plane, comme *b c*, eſt multipliée par une lineaire, comme par *d*, ce qui fait auſſi *b c d*: ce produit s'appelle *ſolide*, ou *une grandeur de 3 dimenſions.*

XXXIII. Et ſi c'eſt une même grandeur qui eſt multipliée 2 fois



fois par elle-même, comme *b* en *b*, & *b b* en *b*: ou (ce qui est la même chose) si un quarré, comme *b b*, est encore une fois multiplié par *b* sa racine, ce qui fait *b b b*: ce solide s'appelle *cube*, & *b* la racine de ce cube.

On marque quelquefois le cube ainsi b^c. c'est à dire *b* cube, ou b^3 c'est à dire *b* de trois dimensions.

DIVISION.

Diviser ou *division*, c'est lors qu'aiant une grandeur qui s'appelle *diviseur*, parce qu'elle en doit diviser une autre qui s'appelle *dividende* : on fait que comme le *diviseur* est au *dividende*, l'unité soit à ce qui naist de la division, qu'on appelle *quotient*. XXXIV.

Afin que 3 divise 12, il faut que je trouve un nombre à qui l'unité soit comme 3 est à 12, & ce nombre est 4; car 3 est quatre fois dans 12, comme l'unité est quatre fois dans 4.

La division s'exprime ainsi *b c* divisé par *p*, & se marque ainsi $\frac{bc}{p}$, & cela s'appelle *quotient*, comme j'ai déja dit; & la grandeur de dessus est le *dividende* ou *grandeur à diviser*, & celle de dessous est le *diviseur*.

C'est presque toûjours une grandeur de plusieurs dimensions qu'on divise par une grandeur de moins de dimensions. Car la division est opposée à la multiplication, comme la soustraction à l'addition; d'où vient que la multiplication du diviseur & du quotient fait une grandeur égale à la grandeur à diviser, parce que la multiplication refait ce que la division avoit défait. Et d'où vient aussi par la même raison que si on veut multiplier une grandeur divisée par le diviseur même, on n'a qu'à oster le diviseur, & la grandeur à diviser de-

meurant seule, sera le produit. Ainsi le produit de $\frac{bc}{g}$ en g est $b\,c$.

XXXV. La division est de peu d'usage dans le traité de la grandeur en general ; parce qu'on ne sçauroit d'ordinaire déterminer un quotient qu'en descendant à quelque espece de grandeur, comme l'étenduë ou le nombre.

Il n'y a qu'une rencontre où on le peut, qui est lors que le même caractere se trouve dans la grandeur à diviser & dans le diviseur. Car alors ostant ce caractere de l'un & de l'autre, ce qui restera sera le quotient.

Ainsi aiant $\frac{bc}{b}$ le quotient sera c.

Aiant $\frac{bcd}{bc}$ le quotient sera d.

Aiant $\frac{bcd}{b}$ le quotient sera $c\,d$.

DES GRANDEURS

Incomplexes et Complexes.

XXXVI. Outre ce que nous avons remarqué que l'on pouvoit considerer les grandeurs comme n'aiant qu'une dimension, ou en aiant plusieurs : on peut encore considerer toutes ces sortes de grandeurs lineaires, planes, ou solides, comme incomplexes, ou comme complexes.

XXXVII. Je les appelle *incomplexes* quand on considere une grandeur d'une ou de plusieurs dimensions à part, comme b, ou $c\,d$, ou $m\,n\,o$, sans y rien ajoûter ou en rien oster.

XXXVIII. Et je les appelle *complexes* quand on y enjoint d'autres de même genre par un *plus* ou un *moins*, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur se doit prendre plusieurs fois, comme $b + c$, ou $b + c + d$, ou $b + f - g$, ou $b\,c + f\,g$, ou $b\,c + f\,g - m\,n$.

Ou par des chiffres, comme $3\,b$.

Or

Or comme il y a quelque difficulté un peu plus grande pour faire les operations dont nous venons de parler sur les grandeurs complexes, nous en donnerons les principes & les regles.

PRINCIPES

POUR FAIRE LES QUATRE OPERATIONS SUR LES GRANDEURS COMPLEXES.

1. Chaque grandeur incomplexe dont la complexe est composée se peut appeller *terme*. XXXIX.

2. Le plus & le moins sont appellez *signes*. XL.

Le plus + *signe affirmatif*; le moins, — *signe negatif*.

3. Par tout où n'est point le signe negatif, l'affirmatif est sous-entendu. Ainsi $b + c$, vaut $+ b + c$. Mais il seroit inutile de marquer le plus au commencement. XLI.

4. Le plus & le moins d'une même grandeur ou terme sont égaux à rien, ou valent zero. Car l'un ostant ce que l'autre a mis, il ne demeure rien. Ainsi $b - b$, ce n'est rien; $b + c - c$ ne vaut que b. Cela est aussi important que facile. XLII.

5. Lors que le même terme est plusieurs fois repeté dans une grandeur complexe, si c'est toûjours avec le même signe, soit affirmatif, soit negatif, on peut ne le mettre qu'une fois avec son même signe, en marquant par un chiffre combien il doit être pris de fois. Ainsi pour $b + c + c + c$, on peut mettre b plus 3 c, ou $b + 3\,c$: au lieu de $b - g - g - g$, on peut mettre b moins 3 g, ou $b - 3\,g$. XLIII.

6. Mais si la même grandeur ou terme est avec des signes divers, on peut alors selon le principe 4. oster ce terme de la grandeur complexe XLIV.

 au-

autant de fois qu'il est avec un plus & avec un moins. Ainsi $b + c + c - c - c$, ne vaut que b, parce que c est autant de fois ôté que mis, & ainsi il ne reste rien. Que s'il y avoit un *plus* davantage, comme $b + c + c - c$, alors il le faudroit laisser une fois avec *plus* ainsi: $b + c$, & de même s'il y avoit un *moins* davantage.

ADDITION

DES GRANDEURS COMPLEXES

XLV. POUR ajoûter une grandeur complexe, comme $b + c$, à une autre grandeur ou complexe comme $m + c$, ou incomplexe comme m: il ne faut qu'y joindre la grandeur qu'on veut ajoûter & en conserver tous les signes; en observant toûjours que le signe affirmatif est sous-entendu où il n'y en a point.

A $b + c.$
ajoûter $m + n.$ } Somme $b + c + m + n.$

A $b + c.$
ajoûter $m - n.$ } Somme $b + c + m - n.$

XLVI. Que s'il y a des chiffres, il les faut laisser comme on les trouve.

A $2b + 3c.$
ajouter $3m + 4n.$ } Somme $2b + 3c + 3m + 4n.$

XLVII. La somme étant trouvée, si le même terme s'y trouve plusieurs fois, on peut pratiquer ce qui a été dit dans le principe 5.[e] & 6.[e] Ce qui soit dit une seule fois pour toutes les autres operations.

SOUSTRACTION

DES GRANDEURS COMPLEXES.

XLVIII. POUR soustraire une grandeur complexe d'une autre grandeur ou complexe ou incomplexe, il ne faut que l'y joindre en changeant tous les signes de

de la grandeur qu'on soustrait, & observant toûjours que le signe affirmatif est sous-entendu où il n'y en a point.

De $b + c.$ } reste $b + c - m - n.$
oster $m + n.$

De $b + c.$ } reste $b + c - m + n - o.$
oster $m - n + o.$

Il n'est pas difficile de juger pourquoi on change le *plus* sous-entendu en *moins* dans le premier terme de la grandeur à soustraire: car c'est en cela même que consiste la soustraction. Mais d'abord on est surpris de ce qu'il faut changer les signes de *moins* en *plus*; car au lieu que la Soustraction doit faire la grandeur moindre qu'elle n'étoit, on la rend plus grande par là.

Cela est facile à comprendre quand ce que l'on doit soustraire, a d'abord un *plus* & puis un *moins*. Comme si de b je veux oster $p - n$; car $p - n$ étant moins que p: en ostant p j'oste trop; & ainsi aiant osté p, parce qu'on a trop osté, il faut ajoûter n, qui est ce qu'on a osté de trop.

Mais quand il n'y auroit dans ce qu'on veut ôter qu'une grandeur avec le signe de *moins*: il faut toûjours la mettre par le signe de *plus*; comme si de b, j'en voulois ôter $- n$, je devrois mettre $b + n$.

Car ce qui trompe en cela, c'est qu'ajoûter *moins*, c'est ôter; & retrancher *moins*, c'est ajoûter. Ajouter au bien d'un homme une dette passive de mille francs, qu'il croit avoir paiée, ce n'est pas augmenter son bien, c'est le diminuer de mille livres; & en retrancher une dette passive de la même somme en la paiant pour lui, ce n'est pas diminuer son bien, c'est l'augmenter de mille francs. Il ne faut donc pas s'étonner si dans l'Addition à b, ajoûtant $- n$, je ne change point le *moins* en *plus*, mais le laissant comme il étoit, cela fait $b - n$: de sorte que la somme est moindre que

 n'étoit

n'étoit ce à quoi je l'ai ajoûté, parce que je n'ai âjouté qu'en apparence, mais j'ai rétranché en effet.

Et au contraire dans la Soustraction, si de *b* je retranche —— *n*, il faut que changeant le signe de *moins* en *plus*, je mette *b* + *n*; ce qui fait un reste plus grand que ce dont j'ai retranché; parceque retrancher un *moins*, c'est ne retrancher qu'en apparence, & ajoûter en effet. On en peut apporter une preuve bien sensible dans les nombres. Je veux de 7 retrancher moins 2, au lieu de 7 je prends 9 —— 2, qui lui est égal. Il faut donc qu'il reste la même chose, si de l'un ou l'autre je retranche —— 2. Or si de 9 —— 2, je retranche —— 2, je le pourrai faire, ou effaçant —— 2 de 9 —— 2, ou en mettant + 2 apres 9 —— 2; c'est à dire en mettant 9 —— 2 + 2. Or de l'une ou de l'autre maniere il restera 9; car 2 étant par *plus* & par *moins* se reduit à zero. Il faut donc qu'il reste la même chose lors que de 7 on ôte —— 2. Et cela ne peut être qu'en changeant le *moins* en *plus*, & mettant 7 + 2; ce qui fait 9.

MULTIPLICATION

DES GRANDEURS COMPLEXES.

XLIX. POUR multiplier une grandeur complexe par une autre complexe ou incomplexe, il faut faire autant de multiplications particulieres que chaque terme de la grandeur complexe peut être comparé avec chaque terme de l'autre grandeur.

DE sorte que multipliant le nombre des termes d'une grandeur à multiplier, avec le nombre des termes de l'autre, on a le nombre des multiplications partiales qu'il faut faire pour avoir la multiplication totale, ou le produit total.

L. AINSI lors qu'une des deux grandeurs n'a qu'un terme & que l'autre en a deux, parce qu'une fois deux ne sont que deux, il ne faudra faire que

deux

deux multiplications partiales de chacun des deux termes d'une grandeur par le terme unique de l'autre.

$$\text{En } \left.\begin{array}{l} b. \\ c + d. \end{array}\right\} \text{ produit } c\,b + d\,b.$$

LORS que les deux grandeurs ont chacune deux termes, parce que deux fois deux sont 4, il faudra faire 4 multiplications partiales pour avoir le produit total. LI.

$$\text{En } \left.\begin{array}{l} b + c. \\ p + q. \end{array}\right\} \text{ produit } p\,b + p\,c + q\,b + q\,c.$$

LORS que chacune a trois termes, parce que trois fois trois sont neuf, il faudra faire neuf multiplications, qu'on pourra disposer trois à trois en cette sorte: LII.

$$\text{En } \left.\begin{array}{l} b + c + d. \\ p + q + r. \end{array}\right\} \begin{array}{l} p\,b + p\,c + p\,d. \\ + q\,b + q\,c + q\,d. \\ + r\,b + r\,c + r\,d. \end{array}$$

& ainsi à l'infini.

LA même chose se fait quand on multiplie des grandeurs planes par des grandeurs lineaires, d'où naissent des grandeurs solides. LIII.

$$\text{En } \left.\begin{array}{l} b\,d + p\,q. \\ f + t. \end{array}\right\} \text{ produit } f\,b\,d + f\,p\,q + t\,b\,d + t\,p\,q.$$

VOILA ce qu'il faut observer generalement dans toute multiplication des grandeurs complexes. Mais il y a une difficulté particuliere pour sçavoir quand il faut mettre les signes de *plus* ou de *moins* avant les produits des multiplications partiales. C'est ce qu'on apprendra par ces trois Regles: LIV.

PREMIERE REGLE.

PLUS en *plus* fait *plus*; c'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont chacun un *plus* exprimé ou sous-entendu, donne un produit qui doit avoir le signe de *plus*. Cela est sans difficulté, & les exemples qu'on a proposez le font assez voir. LV.

SECONDE REGLE.

XVI. Plus en *moins*, ou *moins* en *plus* donne *moins*. C'est à dire que la multiplication de deux termes dont l'un a *plus* & l'autre *moins*, donne un produit qui doit avoir le signe de *moins*.

b } $pb - qb$, parce que q a *moins* & b *plus*
En $p - q$. } sous-entendu.

TROISIÉME REGLE.

XVII. *Moins* en *moins* donne *plus*; C'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont tous deux *moins* donne un produit qui doit avoir le signe de *plus*.

$b - d$ } $bp - pd - bq + dq$.
En $p - q$ }

RAISON DE CES TROIS REGLES.

Ce que nous avons dit pour montrer que dans l'addition on laissoit le *moins* comme on le trouvoit, au lieu que dans la soustraction on changeoit le *moins* en *plus*, donnera un grand jour pour l'intelligence de ces trois regles, & sur tout de la derniere qui paroît d'abord fort étrange.

Supposons que les deux grandeurs que l'on veut multiplier soient 5, & 3.

On en prend une, laquelle on veut, qu'on appelle le multipliant, & l'autre est le multiplié. Supposons que 5 soit le multipliant, & 3 le multiplié.

Chacune peut avoir l'un des deux signes, le *plus* & le *moins* (+ ou —) ce qui fait 4 cas.

Le 1.er cas est quand le multipliant a *plus*, & le multiplié a aussi *plus*; c'est à dire quand par + 5 je multiplie + 3.

Le 2.d cas, est quand le multipliant a *plus*, & que

que le multiplié a *moins*; c'est à dire quand par + 5 je multiplie — 3.

Le 3.e cas, est quand le multipliant a *moins*, & que le multiplié a *plus*; c'est à dire quand par — 5 je multiplie + 3.

Le 4.e cas, est quand le multipliant a *moins*, & que le multiplié à *moins* aussi; c'est à dire quand par — 5 je multiplie — 3.

Il est question de sçavoir quel signe doit avoir le produit qui sera toûjours 15; c'est à dire quand ce sera + 15 ou — 15.

Or voicy ce me semble des remarques qui feront voir que dans le 1.re cas qui appartient à la 1.re regle, & dans le 4.e qui appartient à la 3. regle, le produit aura *plus*; c'est à dire que ce sera + 15: Et que dans le 2.e cas, & dans le 3.e qui appartiennent tous deux à la 2.e regle, le produit sera par *moins*, c'est à dire que ce sera — 15.

La 1.re ramarque est, que quand le multipliant a *plus*, comme dans les deux premiers cas, c'est multiplier par *plus*, & qu'alors la multiplication se fait par voie d'addition; c'est à dire en ajoûtant le multiplié, (quel qu'il soit, affirmatif ou negatif) autant de fois qu'il y a d'unitez dans le multipliant.

Et que quand le multipliant a *moins*, comme dans les deux derniers cas, c'est multiplier par *moins*, & qu'alors la multiplication se fait par voie de soustraction; c'est à dire en ôtant le multiplié, quel qu'il soit, autant de fois qu'il y a d'unitez, quoi que negativement dans le multipliant.

La 2.de remarque est, que c'est le multiplié qui determine en quelque sorte le signe du produit; c'est à dire que le signe que doit avoir le multiplié dans la multiplication, soit en conservant celui qu'il avoit auparavant, soit en le changeant en son opposé, sera celui du produit.

La 3.e qui est la suitte & l'application de ces deux-là,

là : que quand la multiplication se fait par voïe d'addition, comme dans les deux premiers cas où le multipliant a *plus* : il faut observer pour le multiplié ce qui s'observe dans l'addition, qui est de lui conserver son signe. Et ainsi dans les deux premiers cas, le produit doit avoir le même signe qu'avoit le multiplié avant la multiplication. D'où il s'ensuit que dans le premier cas ou le multiplié a *plus*, le produit a *plus* aussi. C'est pourquoi si par + 5 je multiplie + 3 le produit sera + 15. Et que dans le 2.d cas où le multiplié à *moins*, le produit doit aussi avoir *moins*. Et c'est pourquoi, si par + 5 je multiplie —3, le produit sera —15. Ce qui revient à ce qui a été dit que si à 5 j'ajoûte —3, la somme sera 5—3 ; ce qui ne fait que 2.

Mais quand la multiplication se fait par voie de soustraction, comme dans les deux derniers cas, où le multipliant a *moins* : il faut observer pour le multiplié ce qui s'observe dans la soustraction pour la grandeur positive ou negative qu'on veut retrancher, qui est de changer son signe dans le signe opposé. Et ainsi dans ces deux derniers cas le produit doit avoir le signe opposé à celui qu'avoit le multiplié avant la multiplication. D'où il s'ensuit que dans le 3.e cas où le multiplié a *plus*, le produit doit avoir *moins* ; c'est à dire que si par —5 je multiplie + 3 le produit sera —15. Et que de même dans le 4.e cas où le multiplié a *moins*, le produit doit avoir *plus* ; c'est à dire que si par —5 je multiplie —3 le produit sera + 15 ; Car la multiplication se faisant par voie de soustraction : multiplier —3 par —5, c'est ôter 5 fois —3. Or ôter une fois —3, c'est mettre + 3, comme il a été dit sur le sujet de la soustraction ; donc l'ôter 5 fois, c'est mettre + 15 ; ce qu'il falloit prouver.

LVIII. *Cette maniere de concevoir la multiplication de moins en moins, en la considerant comme faite par voye de*

de soustraction, m'a donné moien de resoudre la plus grande difficulté qu'on puisse, comme je croi, faire sur cela, & m'avoit fait croire que ce n'étoit que par accident, que moins par moins donnoit plus. C'est que je ne pouvois ajuster à cette sorte de multiplication, la notion la plus naturelle de la multiplication en general; qui est que l'unité (où determinée dans les nombres, ou arbitraire comme dans l'étenduë) doit étre au multipliant, comme le multiplié est au produit. Car cela est visiblement faux dans la multiplication de moins en moins; puisqu'il ne peut étre vrai que l'unité soit à —— 5, comme —— 3 est à + 15; parce qu'il faudroit pour cela que le second terme étant plus petit que le 1.er le 4.e fût aussi plus petit que le 3.e au lieu qu'il est beaucoup plus grand. Je ne voi point d'autre réponse à cela que de dire que la multiplication de moins par moins se faisant par voie de soustraction, au lieu que toutes les autres se font par voie d'addition: il n'est pas étrange que la notion des multiplications ordinaires ne convienne pas à cette sorte de multiplication qui est d'une autre genre que les autres, sans qu'il soit besoin d'en excepter la multiplication des fractions, comme de $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$. Car en quoi celle-là est differente de celle des entiers, c'est que pour avoir le produit, il faut faire deux multiplications, celle du 1.er Numerateur par le 2.e ce qui donne 10 pour numerateur du produit, & celle du 1.er denominateur par le 2.d, ce qui donne 21 pour le denominateur du produit. Mais l'une & l'autre se fait par voie d'addition; car on prend le 2.d numerateur autant de fois qu'il y a d'unités dans le premier; c'est à dire qu'on prend 5 deux fois, ce qui fait 10. Et on prend aussi le 2.d denominateur autant de fois qu'il y a d'unitez dans le premier; c'est à dire qu'on prend 7 trois fois, ce qui fait 21. Et c'est par là qu'il arrive que l'unité, ou $\frac{3}{3}$, est à $\frac{2}{3}$: comme $\frac{5}{7}$ est à $\frac{10}{21}$.

COROL-

COROLLAIRE DE LA TROISIÉME REGLE.

IIX. C'EST sur la 3.e regle qu'est fondée une invention fort aisée de trouver les multiplications des nombres depuis 5 jusqu'à 10.

Il ne faut que baisser les 10 doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille jusqu'à 10 ; comme si ce nombre est 8, en relever 2, & de l'autre de même autant qu'il s'en faut que l'autre nombre n'aille jusqu'à dix ; comme si ce nombre est 7, en relever 3 : cela fait, il faut conter autant de dixaines qu'il y a de doigts baissez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut. La raison de cela est qu'on ne fait en cela que multiplier

$$\left.\begin{array}{l} 10.\!-\!2. \\ \text{par} \quad \times \\ 10.\!-\!3. \end{array}\right\} 100 - 20 - 30 + 6. \text{ somme } 56.$$

Car en baissant les doigts, on fait la premiere multiplication partiale qui donne dix dizaines.

En levant deux doigts d'une main on fait ce que doit faire la seconde multiplication partiale, qui est de + 10. par — 2, ce qui donne — 20 : car en levant deux doigts on ôte deux dizaines.

En levant 3 doigts de l'autre main on fait encore ce que doit faire la troisiéme multiplication partiale, qui est de + 10 par — 3, ce qui donne — 30 : car en levant 3 doigts on ôte trois dizaines.

Et enfin en multipliant les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, on multiplie — 2 par — 3, ce qui donne + 6 par la raison que nous avons dite.

QUA-

Quatriéme Regle.

Quand les termes se trouvent avec des nombres, il faut multiplier les nombres, par les nombres, & les termes par les termes pour en avoir les multiplications partiales, en gardant les regles precedentes pour ce qui est des *plus* & des *moins*. LX.

$$\left.\begin{matrix}3b\\5d\end{matrix}\right\} 15bd. \qquad \left.\begin{matrix}3b.\\d.\end{matrix}\right\} 3bd.$$

$$\left.\begin{matrix}3b + 2d\\4p + 3q\end{matrix}\right\} 12bp + 8pd + 9bq + 6dq.$$

Division.

Elle n'a rien de particulier, sinon lorsque l'une des grandeurs incomplexes du *diviseur* se trouve dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende*; Car alors il la faudra effacer dans le diviseur & dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende*. LXI.

Exemple $\frac{ba + ca + da}{fa}$ le quotient plus abregé sera $\frac{b + c + d}{f}$

Avertissement.

Comme ces 4 operations sur les grandeurs complexes marquées par lettres, sont une espece de jargon qui embarasse quand on n'y est pas accoûtumé: il est utile d'en proposer plusieurs exemples, où on observera les regles qu'on a données aux nombres 42, 43, 44.

Exemples de l'addition.
Sommes.

A $\quad b + c$
Ajoûter c $\quad\Big\}\ b + 2c.$

A

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+d\\ \text{Ajoûter} & b+c\end{array}\right\}\ 2b+d+c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b-c\\ \text{Ajoûter} & d+c\end{array}\right\}\ b+d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b-c+d\\ \text{Ajoûter} & d+c+g\end{array}\right\}\ b+2d+g.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & -b+c-m\\ \text{Ajoûter} & d-m-c\end{array}\right\}\ d-b-2m.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+7a\\ \text{Ajoûter} & -9a\end{array}\right\}\ b-2a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+7a\\ \text{Ajoûter} & +9a\end{array}\right\}\ b+16a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+9a\\ \text{Ajoûter} & b-7a\end{array}\right\}\ 2b+2a.$$

EXEMPLES DE LA SOUSTRACTION.

RESTES.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d\\ \text{Oſter} & b-m\end{array}\right\}\ d+m.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d\\ \text{Oſter} & -c\end{array}\right\}\ b+d+c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d\\ \text{Oſter} & c+d\end{array}\right\}\ b-c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & s-o\\ \text{Oſter} & s-a\end{array}\right\}\ -o+a\ \text{(ou)}\ a-o.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+c-d\\ \text{Oſter} & b+m+d\end{array}\right\}\ c-m-2d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & bb+cc+cb\\ \text{Oſter} & bb+cc-cb\end{array}\right\}\ 2cb.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d\\ \text{Oſter} & b-d\end{array}\right\}\ 2d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+7a\\ \text{Oſter} & +9a\end{array}\right\}\ b-2a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+9a\\ \text{Oſter} & b-7a\end{array}\right\}\ +16a.$$

De

De $d + b$
Oster $b + d$ } o.

Exemples de la Multiplication.

Produits

Par $b + c$
Mult. $b + c$ } $bb + cc + 2bc$.

Par $b + c$
Mult. $b - c$ } $bb - cc$.

Par $b - c$
Mult. $b - c$ } $bb + cc - 2bc$.

Par $b + c + d$
Mult. m } $bm + cm + dm$.

Par $b + c + d$
Mult. b } $bb + bc + bd$.

Par $b + c - d$
Mult. $b - c$ } $bb - cc - bd + cd$.

Par $b + c - d$
Mult. $b - c + d$ } $bb - cc - dd + 2dc$.

Exemples de la Division.

Quotients.

Dividende $bbcc$
Diviseur cc } bb.

Divid. $bcdf$
Diviseur cf } bd.

Divid. $ba + ca + da$
Diviseur $b + c + d$ } a.

Divid. $bb - aa$
Diviseur $b - a$ } $b + a$.

Divid. $ba + ca + da$
Diviseur a } $b + c + d$.

Divid. $bb + aa + 2ba$
Diviseur $b + a$ } $b + a$.

Divid. $bb - aa$ }
Diviseur. $b + a$ } $b - a$.

DES EQUATIONS.

LXII. Toute égalité entre deux grandeurs se peut appeller *équation* : mais pour l'ordinaire on donne ce nom à l'égalité de deux grandeurs complexes, comme $bp + fg = mn + ft$.

Ou au moins dont l'une est complexe, comme $b + c = d$.

Chacune de ces grandeurs égales peut être appellée *membre de l'équation*.

LXIII. Il est souvent trés-utile de trouver des équations, & l'un des plus grands secrets pour les trouver est de pouvoir donner à une même grandeur diverses dénominations ; parce que souvent une dénomination en fait voir l'égalité avec une autre grandeur qu'une autre dénomination n'auroit pas fait voir.

Ainsi aiant une grandeur comme b partagée en deux portions, comme c & d, on peut nommer chaque portion ou par son propre caractere, comme c, ou par le carectere du tout moins l'autre partie. Car il est bien visible que b étant égal à $c + d$ chaque partie est égale au tout moins l'autre partie, & qu'ainsi $c = b - d$. Et $d = b - c$.

Or il y a beaucoup de rencontres où il est plus avantageux de nommer une partie du nom du tout moins l'autre partie que de luy donner un nom propre. Comme au contraire il est quelquefois plus utile de donner un nom propre à ce qui est marqué par une grandeur moins quelque chose.

THEOREME.

LXIV. La plus importante observation touchant les Equations est celle-cy:

On

On peut transferer chaque terme d'un des membres d'une équation en l'autre sans en troubler l'égalité, pourveu qu'on en change les signes, c'est à dire que l'ôtant d'un des membres où il étoit avec *plus*, on le mette dans l'autre avec *moins* ou au contraire. Par exemple,

$$b + d = f.$$

Je puis transporter d en l'autre membre en changeant de signe & mettant

$$b = f - d.$$

Et si au contraire on avoit.

$$b - d = g.$$

On pourroit mettre.

$$b = g + d.$$

Que si on transportoit tous les termes d'un membre dans l'autre membre en les changeant chacun de signe, le membre où on auroit transporté tous les signes seroit égal à rien, comme seroit celui d'où on les auroit transportez. Car si

$$b + d - f = p + q - r.$$

$b + d - f - p - q + r =$ à zero.

Et si on ne laisse d'un côté qu'un terme avec un *moins*, cela fera que le membre où on aura transporté les autres termes sera égal à zero moins ce terme-là.

$$b + d = f - g.$$

$$b + d - f = -g.$$

C'est à dire sera moins que rien. Ce qui semble impossible à concevoir, quoi que cela ne soit pas sans exemple mesmes dans le langage commun, puis qu'on dit d'un homme endetté qu'il s'en faut vingt mille écus qu'il n'ait un sou:

LA raison de tout cela n'est autre que les deux maximes de l'égalité:

Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous seront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Car si $b - d = g$.

En ajoûtant *d* de côté & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour ajoûter *d* au membre où il est avec *moins*, je n'ay qu'à le retrancher; puis qu'aussi bien si je l'avois ajoûté en disant,

$b - d + d$.

$-d$ & $+d$. ne feroient rien par le 4.e principe.

Et pour ajoûter *d* à l'autre membre où il n'est point du tout, il faut que je l'y mette avec *plus* en disant $g + d$.

Et par conséquent ce transport d'un terme d'un membre en un autre en changeant le *moins* en *plus* ne fait qu'ajoûter choses égales à choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

Et si j'avois $b + d = f$.

En retranchant *d* de côté & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour retrancher *d* du membre où il est avec un *plus* je n'ay qu'à l'oster tout à fait, puis qu'on ne peut pas mieux le retrancher qu'en le supprimant.

Et pour le retrancher du membre où il n'étoit point du tout, il faut l'y mettre avec un *moins*, en disant $f - d$.

Et par consequent ce transport d'un terme d'un membre à un autre en changeant le *plus* en *moins*, ne fait qu'oster choses égales de choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

EXEMPLES.

DE LA SOLUTION D'UN PROBLÉME PAR EQUATIONS.

LXVI. ON feint qu'une Mule allant avec une Asnesse se plaignoit d'étre trop chargée, & que la Mule lui dit; Si je t'avois donné un de mes sacs, nous en aurions au-

autant l'une que l'autre : & si tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy.

On demande combien chacune portoit de sacs. Et on le trouve ainsi.

Le nombre inconnu des sacs de la Mule soit appellé *A*. & de l'Asnesse *B*.

Par la premiere hypothese

$A - 1 = B + 1.$

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$A = B + 2.$

Par l'autre hypothese.

$A + 1$ est égal à deux fois $B - 1$, c'est à dire à $2B - 2$.

Donc en mettant au lieu d'*A*, $B + 2$ qui lui est égal:

$B + 3 = 2B - 2.$

Donc ajoûtant 2 de part & d'autre

$B + 5 = 2B.$

Donc ôtant un *B* de part & d'autre

$5 = B.$

C'est à dire que *B*, le nombre des sacs de l'Asnesse, est 5, & 7 celui des sacs de la Mule.

SECOND EXEMPLE.

AIANT rencontré des pauvres & leur voulant donner à chacun 5 sols, j'ai trouvé que j'en avois un de trop peu. Et ainsi ne leur ayant donné qu'à chacun 4, il m'en est resté 6. Combien y avoit-il de pauvres, & combien avois-je de sols ? LXVII.

Soit le nombre des pauvres appellé *A*.

Par l'hypothese

$5A - 1 = 4A + 6.$

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$5A = 4A + 7.$

Donc ost 4 *A* de part & d'autre

Donc il y avoit 7 pauvres. Et j'avois 34 sols.

TROISIE'ME EXEMPLE.

LXVIII. N'AIANT que des Carolus de 10 derniers & des piéces de 3 blancs de 15 derniers, faire 20 sols en 20 piéces.

Soient appellez le sol A.

Le Carolus $B = A - 2$ den.

La piéce de trois blancs $C = A + 3$ den.

Multipliant B par la difference de C à A, c'est à dire prenant 3 B; & C par la difference de B à A, c'est à dire prenant $2\,C$:

Je dis que $3\,B + 2\,C$ valent $5\,A$.

Car $3\,B = 3\,A - 6$ den.

Et $2\,C = 2\,A + 6$ den.

Or plus & moins valent zero. Donc, &c.

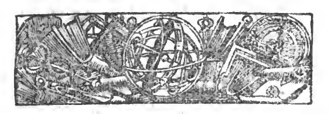
Or 4 fois 5 valent 20.

Donc 4 fois 3 B, c'est à dire $12\,B$, & 4 fois $2\,C$, c'est à dire $8\,C$ valent $20\,A$. Ce que l'on cherchoit.

Cette équation est le fondement d'une regle d'Arithmetique qu'on appelle la regle d'alliage.



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

DE LA RAISON ET PROPORTION GEOMETRIQUES.

RIEN *n'a jamais été moins bien éclairci dans toute la Geometrie, que la nature de ce qu'on appelle* Raison : *&* *l'Auteur de ces Elemens n'a jamais été fort satisfait de ce qu'il en a dit dans la premiere Edition de ce Livre. Mais un Gentilhomme Flamand nommé M. de Nonancourt, qui a beaucoup de lumieres, non seulement dans ces sortes de Sciences, mais aussi dans la Philosophie & dans la Theologie, lui aiant fait voir un petit Traité Latin intitulé* Euclides Logisticus, seu de Ratione Euclideâ; *il avoüe que cela lui a ouvert les yeux, & lui a fait*

 conce-

concevoir des Notions beaucoup plus nettes touchant cette Matiere, qu'il n'en avoit auparavant : & c'est pourquoi on trouvera que ce second Livre & le troisiéme sont presque tout changez.

PLAN GENERAL
DES PROPORTIONS.

ON peut comparer ensemble deux grandeurs en deux differentes manieres.

L'UNE est, en considerant de combien l'une surpasse l'autre quand elles sont inégales, ce qui s'appelle *Difference* : comme si je dis que 2 est la difference de 7 à 5.

L'AUTRE est, en considerant un autre rapport qui s'appelle *Raison*, que nous expliquerons plus bas.

QUE si deux grandeurs ont entr'elles ou même difference, ou même raison que deux autres, cela s'appelle *Proportion* ; mais quand c'est une égalité de difference, cela s'appelle *Proportion Arithmetique.*

ET quand c'est une égalité de Raisons, *Proportion Geometrique.*

MAIS parce qu'on n'a point d'égard dans la Geometrie à la Proportion Arithmetique, & que quand on parle absolument de Proportion on entend toûjours la *Geometrique*, cest à celle-là que nous nous arrêterons; & nous tâcherons d'expliquer plus clairement que l'on ne fait d'ordinaire ce que c'est que Raison, qui est le fondement de la Proportion Geometrique.

SE-

SECTION PREMIERE.

DE LA RAISON.

Definitions.

La quantité relative d'une grandeur comparée à une autre, est ce qu'on appelle ***Raison***.

La quantité relative de 12 à 8, est la Raison de 12 à 8.

De B à C, est la Raison de B à C.

La Raison que l'on compare s'appelle ***antecedent***; & celle avec qui on la compare, ***consequent***.

Remarques pour mieux faire comprendre la nature de la Raison.

Quand on considere une grandeur seule, on n'y considere que sa grandeur absoluë : ainsi en comptant tous les Soldats d'une Armée de 10000 hommes, en y trouvant 10000, je dis que c'est une Armée de 10000 hommes: Mais si je compare cette Armée avec une autre de 100000 ou de 4000, la notion de sa grandeur change ; car je la trouve petite comparée avec la premiere, & grande comparée avec la seconde. Or c'est ce que j'appelle ***Quantité relative***, en quoi consiste ce que les Geometres appellent ***Raison***. I.

Quoi que toute Raison demande deux termes, neanmoins la Quantité relative en quoi la raison consiste, convient proprement à l'antecedent, & non pas au consequent ; comme encore que la Paternité suppose le Pere & le Fils, neanmoins elle ne convient qu'au Pere, & non au Fils; & la Filiation ne convient qu'au Fils, & non au Pere. II.

Comme la Raison est une quantité, quoi que relative, toutes les proprietez de la quantité lui conviennent ; c'est pourquoi une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raison. III.

IV. RIEN ne peut mieux faire comprendre ce que c'eſt que Raiſon, que les fractions ou nombres rompus, qui ſe marquent par deux chiffres, avec une ligne entre-deux, dont le plus haut, qui s'appelle ***numerateur***, eſt comme l'antecedent; & le plus bas, qui s'appelle ***dénominateur***, eſt comme le conſequent: car les nombres entiers ſignifient une quantité abſoluë, en ce que 3, par exemple, ſignifie trois unitez, 4 quatre unitez, &c. au lieu que dans les fractions le numerateur ne ſignifie que par rapport au dénominateur; de ſorte que ſi de trois fractions qui ont toutes le nombre 2 pour numerateur, on en cache le dénominateur, on ne ſçait ce que ce 2 veut dire; mais ſi on le découvre, & que ce ſoient $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ dans la premiere il ſignifiera deux tiers, dans la ſeconde deux cinquiémes, dans la troiſiéme deux ſeptiémes; & il faut remarquer que plus ce dénominateur eſt un petit nombre, plus la fraction eſt grande, & au contraire; car au lieu que 3 eſt un moindre nombre que 5, & 5 que 7, deux tiers eſt plus que deux cinquiémes, & deux cinquiémes plus que deux ſeptiémes; ce que nous dirons dans la ſuite étre la même choſe dans les Raiſons; celles qui ont un même antecedent & divers conſèquens étant d'autant plus grandes que leur conſequent eſt plus petit.

PREMIÉRE DIVISION.

V. TOUTE Raiſon eſt d'***égalité*** ou d'***inégalité***. On appelle Raiſon d'*égalité*, quand l'antecedent eſt égal au conſequent, comme la Raiſon de B à B, de 12 à 12, d'1 à 1; d'*inégalité*, quand l'antecedent eſt plus grand ou plus petit que le conſequent, comme la Raiſon de 12 à 8, ou de 8 à 12.

AVERTISSEMENT.

VI. *Il ne faut pas confondre la Raiſon d'égalité avec l'égalité*

l'égalité des Raisons; car deux Raisons peuvent être égales entr'elles, quoi que chacune soit une Raison d'inégalité.

Seconde Division.

La Raison d'inégalité se divise encore en celle qu'on appelle de *nombre à nombre*, & celle qu'on appelle *Raison sourde*. VII.

On dit que deux grandeurs ont entr'elles une Raison de nombre à nombre, ou quand l'une est précisément contenuë tant de fois dans l'autre; comme la Raison du pied à la toise, la Raison de 4 à 12; ou au moins, quand quelques aliquotes de l'antecedent sont précisément un certain nombre de fois dans le consequent, comme la raison d'une aulne à une toise; parce que le poûce, qui est la 44.[e] partie d'une aulne, est 72 fois dans la toise.

Quand les grandeurs ont entr'elles une raison de nombre à nombre, on dit qu'elles sont *commensurables*; parce qu'elles ont quelque partie qui peut servir de commune mesure à l'une & à l'autre.

C'est ce qui convient à tous les nombres qui ont tous au moins l'unité pour mesure commune.

Et c'est aussi ce qui a fait que l'on appelle cette raison *de nombre à nombre*.

Et le plus court aussi est d'exprimer ces raisons par les moindres nombres qui en ont une semblable, comme de dire que l'aulne est à la toise comme 44 à 72; c'est à dire comme 11 à 18.

La Raison sourde, qui est opposée à celle-là, est quand deux grandeurs ont une certaine Raison entre elles, qui ne peut être marquée par aucun nombre; parce que chacune aiant des parties aliquotes de plus petites en plus petites, à l'infini: Il ne peut neanmoins arriver qu'aucune, quelque petite qu'on la prenne, mesure justement l'autre grandeur, c'est à dire qu'elle y soit precisément,

 mais

mais il y aura toûjours quelque reste plus petit que cette aliquote.

Cela paroît d'abord incroyable, & neanmoins il y a demonstration qu'il y a des lignes qui sont incommensurables à d'autres lignes, comme le côté du quarré à la diagonale.

DE LA COMPOSITION DES RAISONS.

VIII. Comme la Raison est une quantité ou grandeur, quoi que relative : tout ce qui convient à la quantité ou grandeur en general convient aussi à la Raison.

Et ainsi comme deux grandeurs peuvent être comparées ensemble, deux raisons le peuvent être aussi; & alors, comme il y a quatre termes dans cette comparaison : le premier & le quatriéme, qui sont l'antecedent de la premiere Raison & le consequent de la deuxiéme, s'appellent *extrêmes* ; & le deuxiéme & le troisiéme qui sont le consequent de la premiere Raison & l'antecedent de la seconde, s'appellent *moyens*.

Que si considerant ensemble plusieurs Raisons, le consequent de la precedente est toûjours le même que l'antecedent de la suivante : ces Raisons peuvent être appellées *continuës*.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette comparaison de Raisons, est, que comme une grandeur comparée à une autre lui est égale ou inégale, & quand elle est inégale qu'elle est plus grande ou plus petite : Il faut aussi qu'une Raison comparée à une autre lui soit égale ou inégale;& & quand elle est inégale qu'elle lui soit plus grande ou plus petite.

Et comme c'est dans cette comparaison de deux grandeurs que consiste la Raison d'égalité ou d'inégalité : il est clair encore, que deux Raisons étant comparées ensemble, en sorte que l'une soit l'antecedent

cedent & l'autre le conſequent de cette comparaiſon, elles ont entr'elles une nouvelle Raiſon, ou d'égalité ſi elles ſont égales, ou d'inégalité ſi elles ſont inégales.

Or quand c'eſt la Raiſon d'égalité qui eſt entre deux Raiſons, c'eſt à dire quand deux Raiſons ſont égales, cela s'appelle *Proportion*, ou *Proportion Geometrique*:

DEFINITION

DE LA PROPORTION GEOMETRIQUE.

IX. Ainsi ce qu'on entend par la *Proportion Geometrique*, ou par le mot de *Proportion* quand on n'y ajoute rien, n'eſt autre choſe que l'égalité de deux Raiſons; qui conſiſte en ce que la quantité relative d'un antecedent comparé à ſon conſequent, eſt égale à la quantité relative d'un autre antecedent comparé auſſi à ſon conſequent.

La Proportion s'explique en diverſes manieres, c'eſt à dire qu'il y a diverſes façons de parler pour ſignifier que quatre grandeurs, comme B, C, F, G, ſont proportionnelles. On dit premierement que la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſiéme à la quatriéme; que B eſt à C, comme F à G.

2. Que la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt égale à la Raiſon de la troiſiéme à la quatriéme.

3. Que la premiere a la même Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme; & pour abreger on ſe ſert de quatre points : : entre les deux Raiſons B, C : : F, G.

DÉFINITION.

X. Nous avons déja dit que comparant enſemble deux Raiſons, l'antecedent de la premiere & le conſequent de la ſeconde s'appellent *extremes*; & l'antecedent de la ſeconde & le conſequent de la premie-

re *les moyens*: Mais dans les Raisons égales les extremes & les moyens sont dits étre reciproques les uns aux autres; c'est à dire que le premier & le quatriéme terme sont reciproques au deuxiéme & au troisiéme.

AVERTISSEMENT.

XI. NOUS *avons déja dit que la Raison étant une quantité, quoi que relative, comme deux grandeurs étant comparées l'une à l'autre font une Raison, on peut aussi comparer deux Raisons l'une à l'autre, comme la Raison B à X, à la Raison C à X, & considerer quelles Raisons elles ont entr'elles; & alors la premiere Raison (qui a son antecedent & son consequent) n'est que l'antecedent de cette nouvelle Raison que l'on cherche entre ces deux Raisons, & la seconde Raison en est le consequent; & que pour mieux marquer il semble alors à propos de mettre les consequens de ces Raisons que l'on compare au dessous de leurs antecedens, avec une petite ligne entre deux, comme on fait dans les Fractions en cette maniere:*

$$\frac{B}{X},\ \frac{C}{X}.$$

OR cela étant ainsi, ces deux Raisons considerées en cette maniere peuvent étre les deux premiers termes d'une proportion, dont les deux derniers seront ou deux grandeurs absoluës, comme si je dis, la Raison de B à X est à la Raison de C à X, comme B est à C:

$$\frac{B}{X},\ \frac{C}{X} :: B, C:$$

ou deux autres Raisons, comme si je dis, la Raison d'X à X est à la Raison de B à X, comme la Raison d'X à C, est la Raison de B à C.

X

$$\frac{X}{X}, \frac{B}{X} :: \frac{X}{C}, \frac{B}{C}.$$

PROPORTIONS,

OU RAISONS ÉGALES NATURELLEMENT CONNUES.

On ne sçauroit mieux faire comprendre ce que c'est que proportion ou égalité de Raisons, que par des exemples de proportions naturellement connuës, qui serviront aussi de principes pour connoître celles qui ne se discernent pas si facilement. XII.

I.

Toutes les Raisons d'égalité sont égales entr'elles; la Raison de B à B est égale à la Raison de C à C, la Raison d'1 à 1 est égale à la Raison de 3 à 3. XIII.

II.

La Raison d'une grandeur à son multiple quelconque, est égale à la raison d'une autre grandeur à son équi-multiple. La Raison de B au triple de B, est égale à la Raison de C au triple de C. XIV.

La Raison de 2 au triple de 2 (qui est 6) est égale à la Raison de 5 au triple de 5 (qui est 15).

III.

La Raison d'une grandeur à une autre grandeur est égale à la Raison de leur équimultiple. XV.

La Raison de B à C est égale à la Raison du triple de B au triple de C.

La Raison de 2 à 5 est égale à la Raison de 6 triple de 2 à 15 triple de 5.

IV.

La Raison des multiples differents de la même grandeur est égale à la Raison des multiples d'une XVI.

autre grandeur pareils aux premiers, chacun à chacun & dans le même ordre.

La Raiſon de 3 B à 5 B, eſt égale à la Raiſon de 3 C à 5 C.

V.

La Raiſon des multiples pareils de deux grandeurs, eſt égale à la Raiſon d'autres multiples pareils des mêmes grandeurs.

La Raiſon de 3 B à 3 C, eſt égale à la Raiſon de 5 B à 5 C.

Avertissement.

XVII. Tout *ce qu'on vient de dire des multiples ſe peut dire auſſi des aliquotes n'étant que la même choſe ſous un autre nom; car toute grandeur eſt multiple de ſes aliquotes, & aliquote de ſes multiples.*

Definition. Division.

XVIII. La Proportion eſt ou *diſcrete*, ou *continuë*: On l'appelle *diſcrete* quand le conſequent de la premiere Raiſon eſt different de l'antecedent de la ſeconde, comme dans tous les exemples qu'on a rapportés. B, C. :: F, G.

On l'appelle *continuë* quand la même grandeur qui eſt le conſequent de la premiere Raiſon eſt l'antecedent de la ſeconde: comme ſi je diſois B eſt à C, comme C, eſt à D. B. C :: C. D; ce qui ſe peut auſſi marquer ainſi ∺ B. C. D.

Definition.

XIX. Cette proportion continuë s'appelle *Progreſſion*, quand y ayant pluſieurs raiſons égales de ſuite, le conſequent de la precedente eſt toûjours l'antecedent de la ſuivante, comme B eſt à C, comme C à D, comme D à F, comme F à G, &c. Ce qui ſe marque ainſi ∺ B. C. D. F. G.

L.

I. Axiôme.

La Raiſon d'un antecedent à un conſequent, a pour parties les Raiſons de châque partie de l'antecedent à ce même conſequent ; & cette raiſon eſt égale à toutes les raiſons partiales priſes enſemble de l'antecedent au même conſequent. Soit la grandeur T, diviſée en pluſieurs parties égales, ou inégales, comme M, P, Q; ſi on compare T à quelque autre quantité comme O, enſorte que T ſoit l'antecedent, & O le conſequent : La raiſon de T à O, a pour parties les raiſons de M à O, de P à O, de Q à O, & leur eſt égale. XX.

$$\frac{T}{O} = \frac{M}{O} + \frac{P}{O} + \frac{Q}{O}.$$

Car T valant $M + P + Q$, il eſt viſible que $\frac{T}{O}$ eſt égale a $\frac{M + P + Q}{O}$

Remarquez que je dis que la Raiſon $\frac{T}{O}$ a pour parties les raiſons $\frac{M}{O}, \frac{P}{O}, \frac{Q}{O}$, & non pas qu'elle en eſt compoſée, ce qui ſignifie tout autre choſe, comme on verra dans la ſuite.

II. Axiôme.

La Raiſon d'un antecedent à un conſequent, eſt égale à la Raiſon d'un autre antecedent moindre que le premier au même conſequent, plus la Raiſon de la grandeur dont un antecedent ſurpaſſe l'autre au conſequent. Et ainſi la Raiſon du plus grand antecedent au conſequent eſt plus grande que la Raiſon du plus petit antecedent à ce même conſequent. XXI.

C'eſt une ſuite de l'Axiôme precedent.

Car la Raiſon du grand antecedent au conſequent, a pour parties la Raiſon du petit antecedent XXII.

au

au conſequent plus la Raiſon de la quantité, dont le grand antecedent ſurpaſſe le plus petit, à ce même conſequent, & elle leur eſt égale.

Cette quantité dont une grandeur en ſurpaſſe une autre, s'appelle la *difference* qui eſt entre ces deux grandeurs. Soit B plus grand que C, & la difference de B à C, ſoit appellée X : enſorte que C+X, ſoit égal à B ∫ $\frac{D}{B}$ eſt égal à $\frac{C}{D} + \frac{X}{D}$.

III. Axiôme.

XXIII. La Raiſon de l'antecedent à une partie du conſequent eſt plus grande que la raiſon du même antecedent à tout le conſequent; & ainſi la raiſon d'un antecedent à un conſequent eſt une plus grande raiſon que celle du même antecedent à un autre conſequent plus grand que le premier.

La Raiſon de B à X partie de D eſt plus grande que la Raiſon de B à D; & de même ſi X eſt plus petit que Y, la Raiſon de B à X, ſera plus grande que celle de B à Y.

IV. Axiôme.

XXIV. Les Raiſons qui ont un même conſequent ſont entr'elles comme leurs antecedens, $\frac{B}{X} . \frac{C}{X} :: B . C$.

C'eſt une ſuite du 2.[de] Axiôme; car ſi deux antecedens étant comparez à un même conſequent, la la Raiſon du plus grand antecedent eſt plus grande que celle du plus petit : il faut que ces raiſons ſoient entr'elles comme les antecedens.

V. Axiôme.

XXV. Les Raiſons qui ont un même antecedent ſont entr'elles comme leurs conſequens dans un ordre reciproque ou renverſé, c'eſt à dire que la premiere eſt

eſt à la ſeconde, comme le conſequent de la ſeconconde eſt au conſequent de la premiere $\frac{x}{B}, \frac{x}{C}$: : C, B.

C'eſt la ſuite du troiſiéme Axiôme; car ſi comparant le même antecedent à differens conſequens, la Raiſon de cet antecedent à chaque conſequent eſt plus grande quand le conſequent eſt plus petit, & plus petite quand le conſequent eſt plus grand : il eſt clair que ces raiſons doivent étre entr'elles comme les conſequens dans un ordre renverſé ; puiſque ſi le conſequent de la premiere eſt plus grand que le conſequent de la ſeconde : la premiere ſera plus petite que la ſeconde, comme le conſequent de la ſeconde eſt plus petit que le conſequent de la premiere.

VI. Axiôme.

Si deux raiſons ſont égales à une méme raiſon : elles ſont égales entr'elles. XXVI.

B.C. ..
F.G .. M.N.

Donc B.C. :: F.G.

Et c'eſt la même choſe que ſi deux raiſons étant égales à deux autres raiſons chacune à chacune, elles ſont égales entr'elles ; ſi les Raiſons I & O étant ſuppoſées égales, la Raiſon A eſt égale à la Raiſon I, & la Raiſon E, égale à la Raiſon O : A & E ſeront égales entr'elles.

Corollaire.

Quand pluſieurs proportions diſcretes conſiderées enſemble, ſont telles que les deux derniers termes de la precedente ſont toûjours les deux premiers termes de la ſuivante : elles peuvent étre appellées *continuës* en leur maniere, ou *diſcretement continuës* ; & alors il eſt clair que toutes ces raiſons de ces diverſes proportions ſont égales, & qu'ainſi l'on XXVII.

l'on peut toujours conclure que les deux premiers termes sont entr'eux comme les deux derniers, ce qui sera d'un grand abregement dans la suite. Exemples dans les nombres :

$$\frac{8}{12} . \frac{15}{21} . :: \frac{2}{3} . \frac{5}{7} . :: \frac{7}{3} . \frac{5}{2} . :: \frac{7}{5} . \frac{3}{2} .$$

Donc $\frac{8}{12} . \frac{15}{21} . :: \frac{7}{3} . \frac{3}{2} .$

VII. Axiôme.

XXVIII. Deux grandeurs sont égales lors qu'elles ont même Raison à une même grandeur, ou qu'une même grandeur a même Raison à châcune.

Si B. S. :: D. S.
Ou que S. B. :: S. D.
Donc B est égal à D.

Que si ce sont les grandeurs B & D qu'on suppose égales : elles auront même Raison à une même grandeur, & une même grandeur aura même Raison à châcune. Si B est égale à D: B. S. :: D. S. & S. B. :: S. D.

Le fondement de tout cela, est qu'il est clair qu'en matiere de Raison deux grandeurs égales & une même grandeur deux fois repétée sont la même chose.

VIII. Axiôme.

XXIX. Il peut y avoir trois sortes d'égalitez en 4 termes qui sont deux Raisons.

1. L'égalité des antecedens, qui sont le 1.er & le 3.e des ces 4 termes. 2. L'égalité des consequens, qui sont le 2.d & le 4.e 3. L'égalité des Raisons mêmes. Et deux de ces égalitez étant données donnent celle qui reste. Soient les 2 Raisons $\frac{B}{S}$ & $\frac{D}{T}$.

Preuve du 1.er & 2.d cas. Supposé que le 1.er terme

me soit égal au 3.e & le 2.^d au 4.e B à D & S à T ; par ces hypotheses, & le septieme Axiôme, B.S :: D.S :: D.T ; donc par le VIe Axiôme B.S :: D.T.

Preuve du 1.er & 3.e cas. Supposé que $\frac{B}{S}$ soit égale à $\frac{D}{T}$ & B égal à D ; par ces hypotheses, & le VIIe Axiôme B.S :: D.T :: B.T donc par le VIIe Axiôme S est égal à T.

C'est la même chose si on suppose que S est égal à T ; on en conclura de la même sorte que B sera égal à D ; ce qui fait le 2.^d & 3.e cas.

COROLLAIRE.

IL en est de même des Raisons que des Grandeurs; car 1. considerant ensemble 4 Raisons, elles seront proportionnelles, si la 1.re est égale à la 3.e & la 2.de à la 4.e Ainsi parce que la Raison de 2 à 3, est égale à la Raison de 4 à 6, & la Raison de 5 à 7, égale à celle de 15 à 21 : $\frac{2}{3}.\frac{5}{7} :: \frac{4}{6}\ \frac{15}{21}$. XXX.

2. Supposant que ces 4 Raisons sont proportionnelles. Si la 1.re est égale à la 3.e la 2.de le sera à la 4.e & reciproquement si la 2.de est supposée égale à la 4.e la 1.re le sera à la 3.^e

IX. AXIÔME.

QUAND on a deux proportions, les 4 Raisons de ces deux proportions sont proportionnelles. La 1.re Raison de la 1.re Proportion étant à la 1.re Raison de la 2.de Proportion, comme la 2.de Raison de la 1.re Proportion est à la 2.de Raison de la derniere. Si B.C. :: F.G. & M.N :: P.Q $\frac{B}{C}.\frac{M}{N} :: \frac{F}{G}.\frac{P}{Q}$. XXXI.

Car la 1.re Raison $\frac{B}{C}$ est égale à la 3.^e $\frac{F}{G}$, par ce que ce sont les deux Raisons de la 1.re Proportion ; & la 2.de est égale à la 4.e par la même Raison. Donc par le VIIIe Axiôme, il y a une nouvelle proportion entre ces 4 Raisons.

X.

X. Axiôme.

XXXII. On ne change rien dans une proportion quand on ne fait qu'en transposer les raisons ; car deux choses égales demeureront toûjours égales de quelque maniere qu'on les dispose. Si donc
B. C. :: F. G. je dis qu'aussi
F. G. :: B. C.

I. Theoréme.

XXXIII. Deux Raisons sont égales quand toutes les Aliquotes pareilles de châque antecedent sont également contenuës dans son consequent.

Soient 4 grandeurs B, C, F, G, & les Aliquotes quelconques de B soient appellées X, & les pareilles de F soient appellées Y. 1. Je dis que B. C. :: F. G. si X & Y sont également contenuës dans les consequens C & G.

Mais cela peut être entendu en deux manieres. La premiere est quand X est précisément autant de fois dans C qu'Y est dans G, & alors il n'y a aucune difficulté, & il suffit même d'avoir examiné une seule Aliquote pareille des antecedens ; car il est visible que si X [$\frac{1}{10}$ de B] est sept fois dans C, & Y [$\frac{1}{15}$ de F] 7 fois dans G. B. C. :: F. G. 10 X. 7 X. :: 10 Y. 7 Y.

L'autre maniere fait toute la difficulté ; c'est quand une Aliquote quelconque de B, que je nomme X, n'est jamais précisément tant de fois dans C, mais toûjours avec quelque reste ; car alors l'Aliquote quelconque pareille de F ne peut être également contenuë dans G, que par ce qu'elle y sera autant de fois que X dans C, mais toûjours avec quelque reste ; comme si X $\frac{1}{10}$ de B est dans C 7 fois plus R, & Y $\frac{1}{10}$ de F est aussi dans G sept fois plus R : je dis que quand on peut sçavoir que cela se trouvera gene-

generalement dans toutes les aliquotes pareilles des antecedens ; c'est à dire qu'elles seront toutes au moins en cette maniere également contenuës dans les consequens : les Raisons $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ seront égales. Je ne sçai si on le peut mieux prouver qu'en cette maniere :

Si les Raisons $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ n'étoient pas égales : dans cette supposition il faudroit que la premiere fust plus ou moins grande que la seconde ; & si elle étoit plus grande, en augmentant son consequent de quelque chose on la diminuëroit : & par là on la pourroit rendre égale à $\frac{F}{G}$; comme au contraire ; si elle étoit moins grande : on pourroit ajoûter quelque chose au consequent de la seconde, & par là rendant cette seconde moins grande, on pourroit encore faire que la premiere lui fust égale.

Or on ne sçauroit augmenter C de quoi que ce soit, qu'on ne rende la Raison $\frac{B}{C}$ plus petite qu'il ne faut pour étre égale à $\frac{F}{G}$, ce que l'on peut prouver ainsi : ajoûtant Z à C, quand Z ne seroit que la milliéme partie de l'epaisseur d'un cheveux, je dis que la Raison $\frac{B}{C+Z}$ seroit plus petite qu'il ne faudroit pour étre égale à $\frac{F}{G}$; car si l'on prend l'*Aliquote* X plus petite que Z, il est manifeste que X sera dans C + Z une fois plus que dans C : de sorte que si X est la $\frac{1}{10000}$ de B & qu'elle soit 8701 dans C, la même X [prise comme il a été dit plus petite que Z] sera dans C + Z, 8702 + R, au lieu que Y qui est aussi la $\frac{1}{10000}$ de F ne sera dans G que 8701 + R.

Or il est clair que la Raison de 10000 X à 8702 X plus R est plus petite que la Raison de 10000 Y à 8701 Y + R.

Donc on ne peut rien ajoûter à C qu'on ne rende

rende $\frac{B}{C+Z}$ plus petite que $\frac{F}{G}$. Il eſt aiſé de voir que l'on prouvera de la même ſorte qu'on ne peut rien ajoûter à G que l'on ne rende la Raiſon $\frac{B}{C}$ plus grande que $\frac{F}{G}$.

Donc la Raiſon $\frac{B}{C}$ n'eſt ni plus ni moins grande que la Raiſon $\frac{F}{G}$.

Donc elle lui eſt égale.

II. Theoréme.

XXXIV. Si 4 grandeurs ſont proportionnelles: elles le ſeront encore en les renverſant; c'eſt à dire en comparant le premier conſequent au premier antecedent, & le ſecond conſequent au 2 antecedent, le 2 terme au premier, le 4 au 3.e, ce qui s'appelle *Permutando*. Si B. C. :: F. G: je dis que C. B. :: G. F; car $\frac{C}{C} \cdot \frac{B}{C} :: \frac{G}{G} \cdot \frac{F}{G}$ par le Corollaire du 8.e Axiome, la ſeconde de ces Raiſons étant égale à la 4.e par l'hypotheſe, & la premiere & la 3.e étant des Raiſons d'égalité. Or les deux premieres Raiſons aiant même conſequent ſont comme leurs antecedens par le 4.e Axiome; & il en eſt de même des deux dernieres, qui ont auſſi même conſequent. Donc C. B. :: G. F; ce qu'il faloit demontrer.

Corollaire.

XXXV. Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en les prenant à rebours; c'eſt à dire que la 4.e ſera à la 3.e comme la 2.de à la 1.re ſi B. C. :: F. G: je dis que G. F. :: C. B.

Car par le precedent Theoréme, la 2.de eſt à la 1.re comme la 4.e eſt à la 3.e C. B :: G. F. Donc par le X.e Axiôme en tranſpoſant les Raiſons, la 4.e ſera à la 3.e comme la 2.de à la 1.re G. F :: C. B.

Autrement: Par l'hypotheſe, les Raiſons $\frac{F}{G}$ &

& $\frac{B}{C}$ ſont égales. Donc par le Coroll. du 8.[e] Axiôme $\frac{G}{G}\cdot\frac{F}{G}$: : $\frac{C}{C}\cdot\frac{B}{C}$; donc par le 4.[e] Axiôme G. F. : : C. B.

III. THEORÉME.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en les prenant alternativement ; c'eſt à dire en comparant les antecedens enſemble, & les conſequens enſemble, le 1.[re] terme au 3.[e], & le 2.[d] au 4.[e], ce qui s'appelle *Alternando.* Si B. C. : : F. G. Je dis qu'*Alternando* B. F. : : C. G ; car $\frac{B}{C}\cdot\frac{F}{C}$: : $\frac{F}{G}\cdot\frac{F}{C}$, par le 8.[e] Axiôme & ſon Corollaire ; La premiere & la 3.[e] Raiſon étant égales par l'hypotheſe ; & la 2.[de] & la 4.[e] étant la même. Or $\frac{B}{C}\cdot\frac{F}{C}$: : B. F, par le 4.[e] Axiôme, & $\frac{F}{G}\cdot\frac{F}{C}$: : C. G, par le V.[e] Axiôme. XXXVI.

Donc B. F. : : C. G. par le VI.[e] Axiôme ; ce qu'il falloit demôntrer.

COROLLAIRE. XXXVII.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en tranſpoſant la premiere, & la 4[e] ; c'eſt à dire que la 4[e]. ſera à la ſeconde, comme la 3[e]. à la 1[re]. ſi B. C. : : F. G : je dis que G. C. : : F. B ; car par le precedent Theoréme, la 1.[re] eſt à la 3.[e] comme la 2.[de] à la 4.[e] B. F. : : C. G. Donc *Permutando*, la 3.[e] eſt à la 1.[re] comme la 4.[e] eſt à la 2.[de] F. B : : G. C ; donc par le X.[e] Axiôme en tranſpoſant les Raiſons : la 4.[e] ſera à la 2.[de] comme la 3.[e] à la 1.[re] G. C : : F. B.

Autrement : Par l'hypotheſe, les Raiſons $\frac{C}{G}$ & $\frac{B}{F}$. ſont égales. Donc par le Coroll. du 8.[e] Axiôme $\frac{G}{G}\cdot\frac{C}{G}$: : $\frac{F}{F}\cdot\frac{B}{F}$; donc par le 4.[e] Axiôme G. C : : F. B.

HUIT

Huit Dispositions.

Dans lesquelles 4 Grandeurs peuvent être proportionnelles.

XXXVIII. Il s'ensuit deux choses de ce que dessus : 1. Que 4 grandeurs étant proportionnelles, elles le sont toujours de quelque maniere qu'on les transporte, pourveu que les extrémes demeurent extrémes, & les moyens ; moyens ; ou que les extrémes deviennent moyens, & les moyens extrémes.

2. Qu'il y a huit differentes dispositions, ni plus ni moins, dans lesquelles 4 Grandeurs peuvent étre proportionnelles. Les voici en les marquant par premiere, seconde, troisiéme, & quatriéme, selon qu'elles auroient été disposées la 1.re fois :

Hypothese 1.2 :: 3.4.	Premiere disposition.
10 Axiôme 3.4 :: 1.2.	Equivalente.
2 Theoréme 2.1 :: 4.3.	Permutation.
10 Axiôme 4.3 :: 2.1.	Equivalente.
3 Theoréme 1.3 :: 2.4.	Alterne.
10 Axiôme 2.4 :: 1.3.	Equivalente.
2 Theoréme 3.1 :: 4.2.	Permutation d'Alterne.
10 Axiôme 4.2 :: 3.1.	Equivalente.

On peut encore prouver ces 8 dispositions en cette maniere : Ayant mis en quarré les 4 Grandeurs proportionnelles : ensorte que dans la premiere disposition, les antecedens soient au dessus des consequens, ainsi :

B F
C G.

Elles seront toûjours proportionnelles en les prenant deux à deux en méme sens de quelque maniere que ce soit, pourveu que ce ne soit point de coin en coin. Mais.

1. De haut en bas, par l'Hypothese.
2. De bas en haut, *Permutando.*
3. De gauche à droite, *Alternando.*
4. De droite à gauche, *Permutando.* L'Alterne &

& châcune de ces dispositions est double, parce que l'on peut commencer par laquelle on voudra des deux raisons.

IV. THEORE'ME.

DES RAISONS PROPORTIONNELLES.

LES deux Theorémes precedens sont vrais, des XXXIX.
Raisons proportionnelles aussi-bien que des Grandeurs; c'est à dire que si 4 Raisons sont proportionnelles, la 1re étant à la 2.de comme la 3.e à la 4.e, elles le seront *Permutando* & *Alternando*; c'est à dire que la 2.de sera à la premiere comme la 4.e à la 3.e; & que la premiere sera à la 3.e comme la 2.de à la 4.e On se contentera de prouver l'Alterne qui est de plus grand usage. Soient les 4 Raisons proportionnelles $\frac{2}{21}.\frac{3}{13}::\frac{4}{7}.\frac{6}{5}$. qu'on appellera pour les marquer avec moins d'embarras a.e.::i.o. Elles ne sont proportionnelles que parce que la Raison qui est entre les deux premieres Raisons [a & e] est égale à la Raison qui est entre les deux dernieres [i & o;] donc $\frac{a}{e}=\frac{i}{o}$; donc comparant châcune de ces Raisons égales entr'elles, avec la Raison qui est entre la 3.e & la 2.de; c'est à dire avec $\frac{i}{e}$; il est clair par le Corollaire du 8.e Axiome que $\frac{a}{e}.\frac{i}{e}::\frac{i}{o}.\frac{i}{e}$.

Or les deux premieres de ces 4 nouvelles Raisons ayant même consequent, sont comme les antecedens a & i; & les deux dernieres ayant le même antecedent, sont comme les consequens dans un ordre renversé; c'est à dire comme e & o; donc si A. E. : : I.O. A.I.::E.O.

V. THEORÉME.

SI à 4 Grandeurs proportionnelles comme B. C. C. XL.

C. :: F. G. on en ajoûte deux quelconques, comme M & N : la raison de La 2.de à la 5.e est à la Raison de la 4.e à la 6.e ; comme la Raison de la 1.re à la 5.e, est à la Raison de la 3. à la sixiéme $\frac{C}{M} . \frac{G}{N} :: \frac{B}{M} . \frac{F}{N}$.

Car la 1.re & la 3.e de ces 4 Raisons ayant même consequent, sont comme les antecedens; c'est à dire comme C est à B. Et il en est de même de la 2.de & de la 4.e qui sont comme G à F. Or par l'Hypothese & le 2.d Theoréme C B. :: G. F. Donc la premiere de ces Raisons est à la 3.e, comme la 2.de à la 4.e; donc *Alternando* la 1.re est à la 2.de, comme la 3.e à la 4e.

VI. Theoréme.

XLI. Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B. C. :: F. G, on en ajoûte deux autres quelconques comme M. & N; la Raison de la 2.de à la 5.e est à la Raison de la 6.e à la 3.e comme la Raison de la 1.re à la 5.e est à la Raison de la 6.e à la 4.e $\frac{C}{M} . \frac{N}{F} :: \frac{B}{M} . \frac{N}{G}$.

Demonstration. La 1.re & la 3.e de ces 4 Raisons ayant même consequent, sont comme les antecedens, par le IV.e Axiôme; c'est à dire comme C. à B. Et la 2.de & la 4.e ayant même antecedent, sont comme les consequens dans un ordre renversé [par le V.e Axiôme,] c'est à dire comme G à F. Or par l'Hypothese & le 2.d Theoréme C. B :: G. F; donc la 1.re de ces Raisons est à la 3.e comme la 2.de à la 4.e; donc *Alternando* la 1.re est à la 2.de comme la 3.e à la 4.e; ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

XLII. Dans l'une & l'autre de ces deux proportions de

de Raisons des deux Theorémes precedens, si l'on suppose que les deux premieres Raisons sont égales, les deux dernieres le sont aussi; c'est à dire pour 5.e Theoréme: Si C. M.:: G. N; B. M.:: F. N; & pour le VI.e Theoréme: Si C. M.:: N. F; B. M. :: N. G. C'est une suite évidente de ces deux Theorémes, mais comme on a accoutumé de proposer l'un & l'autre en d'autres termes, nous en ferons le VII.e & le VIII.e Theoréme.

VII. Theoréme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B. C.:: F. G. On en ajoûte deux autres comme M, N, qui soient telles que la 2.de soit à la 5.e comme la 4.e à la 6.e la 1.re sera à la 5.e comme la 3.e à la 6e. XLIII.

1.re Hypothese, B. C.:: F. G.
2.de Hypothese, C. M.:: G. N.
Consequence à prouver, B. M.:: F. N

Demonstration. Par la 1.re Hypothese & le 4.e Axiôme, ces 4 Raisons sont proportionnelles $\frac{B}{M} \cdot \frac{C}{M} :: \frac{F}{N} \cdot \frac{G}{N}$. Or par la 2.de Hypothese, la 2.de Raison & la 4.e [$\frac{C}{M}$ & $\frac{G}{N}$] sont égales, [car c'est ce que l'on suppose quand on dit que C. M.:: G. N.] Donc par le Corollaire du VIII.e Axiôme, la 1.re Raison & la 3.e [$\frac{B}{M}$ & $\frac{F}{N}$] sont égales, c'est à dire que B. M.:: F. N, ce qui est la consequence à prouver. Ce Theoréme, s'appelle *Æqualitas ordinata*.

VIII. Theoréme.

Si à 4 grandeurs proportionnelles comme B. C. :: F. G, on en ajoûte deux autres comme X & Y, qui soient telles que la 2.de soit à la 5.e comme la 6.e à la 3.e la premiere sera à la 5.e comme la 6.e à la 4.e XLIV.

1.re Hypothese, B. C. :: F. G.
2.de Hypothese, C. X. :: Y. F.
Consequence à prouver, B. X. :: Y. G.

Demonstration. Par la 1.re Hypothese, & le IV.e V.e & Axiôme $\frac{B}{X}\ \frac{C}{X} :: \frac{Y}{G}\ \frac{Y}{F}$. Or par la 2.de Hypothese, la seconde & la quatriéme Raison [$\frac{C}{X}$ & $\frac{Y}{F}$] sont égales, car c'est ce que l'on suppose quand on dit que C. X :: Y. F; donc par le Corollaire du VIII.e Axiôme, la 1.re Raison & la 3.e [$\frac{B}{X}$ & $\frac{Y}{G}$] sont égales aussi, c'est à dire que B. X :: Y. G; ce qui est la consequence à prouver. Ce Theoréme s'appelle *Æqualitas perturbata*.

AVERTISSEMENT.

XLV. ON propose encore ce dernier Theoréme d'une autre maniere qui revient à la même chose, quoique cela paroisse fort different.

VIII. THEORÉME,

Proposé d'une autre maniére.

XLVI. Y ayant 3 Grandeurs d'une part, & 3 de l'autre: Si la 1.re d'une part est à la 2.de comme la 2.de de l'autre part est à la 3e; & que la 2.de d'une part soit à la 3.e comme la 1.re de l'autre part est à la 2de: la 1.re d'une part sera à la 3e, comme la 1.re de l'autre part sera à la 3e.

Soient les Grandeurs 3 d'une part B, C, X, & 3 de l'autre Y, F, G,

1.re Hypothese, B. C. :: F. G.
2.d Hypothese, C. X. :: Y. F.
Consequence à pouvrer, B. X. :: Y. G.

On voit clairement que ce sont les mêmes Hypotheses & la méme consequence à prouver que dans le VIIIe. Theoréme, & qu'ainsi cela se prouvera

vera de la même forte. Il faudra peut-estre mettre là les Reciproques.

IX. Theoréme.

Si 4. Grandeurs sont proportionnelles, elles le seront encore en comparant châque antecedent plus ou moins son consequent, avec son consequent; c'est à dire, que si la 1.re est à la 2.de comme la 3.e est à la 4e; la 1.re plus ou moins la 2.de sera à la 2.de comme la 3.e plus ou moins la 4.e à la 4e; ce qui s'appelle ordinairement *Componendo*, s'il y a plus; & *Dividendo* s'il y a moins, quoique peut-estre par abus, comme nous le ferons voir plus bas; & il faut remarquer que pour y avoir moins, chaque antecedent doit estre plus grand que son consequent. Il faut prouver que si B.C.::F.G. B plus ou moins C, est à C, comme F, plus ou moins G est à G; c'est à dire que B $\pm$ C.C::F $\pm$ G.G. Car $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ estant égales par l'hypothese, & $\frac{C}{C} = \frac{G}{G}$, parce que ce sont deux Raisons d'égalité: $\frac{B}{C} \pm \frac{C}{C}$ est égal á $\frac{F}{G} \pm \frac{G}{G}$. Or $\frac{B}{C} \pm \frac{C}{C}$ n'est autre chose que $\frac{B \pm C}{C}$; & $\frac{F}{G} \pm \frac{G}{G}$ n'est autre chose que $\frac{F \pm G}{G}$. Donc $\frac{B \pm C}{C}$ est égal à $\frac{F \pm G}{G}$; c'est à dire que la raison de B plus ou moins C à C, est égale à la Raison de F plus ou moins G à G; donc B $\pm$ C.C::F $\pm$ G.G; ce qu'il falloit demontrer. XLVII.

X. Theoréme.

Si 4 Grandeurs sont proportionnelles, & que cha- XLVIII.

châque antecedent soit plus grand que son consequent: le 1.^r antecedent est à la quantité dont il surpasse son consequent, en même Raison que le second antecedent est à la quantité dont il surpasse son consequent. Cette quantité s'appelle la difference de l'antecedent d'avec son consequent, comme nous avons déja vû. Soit B. C. : : F. G, & que châque antecedent soit plus grand que le consequent. Je dis que B. B — C : : F. F — G. Pour le montrer, il ne faut que prouver que B — C. B : : F — G. F; car si cela est, l'autre sera vray *Permutando*. Or ce dernier est clair; car la Raison de $\frac{B-C}{B}$ est la même chose que $\frac{B}{B}$ moins $\frac{C}{B}$; & $\frac{F-G}{F}$ est la même chose que la Raison $\frac{F}{F}$ moins $\frac{G}{F}$. Or $\frac{B}{B} = \frac{F}{F}$ & $\frac{C}{B} = \frac{G}{F}$; donc $\frac{B-C}{B} = \frac{F-G}{F}$; donc B — C. B : : F — G. F, & *Permutando* B. B — C. : : F. F — G; ce qu'il falloit demontrer.

XI. Theoreme.

XXIX. Lors qu'on a deux proportions que je nommeray A & E: Si 3 termes de l'une sont égaux à 3 termes de l'autre, châcun à châcun, & dans le même ordre [c'est à dire le 1.^r au 1.^r le 2.^d au 2.^d; &c.] Les deux qui resteront de part & d'autre seront aussi égaux entr'eux.

Soit la proportion A. B. D. : : L. M.

& la proportion E. β. δ. : : λ. μ. Je dis que si le premier terme d'A est égal au 1.^r terme d'E; & le 2.^d au 2.^d; & le 3.e au 3.e: les deux quatriémes le seront aussi; car par le 9.e Axiôme, les 2 premieres Raisons d'A & d'E sont entr'elles comme les deux dernieres.

Or les deux premieres sont égales par le 8.e Axiôme, parceque par l'Hypothese, les antecedens sont

sont égaux, & leurs consequens aussi. Il faut donc aussi que les deux dernieres Raisons soient égales, c'est à dire que L. M.:: λ. μ. Or les deux antecedens de ces deux Raisons qui sont L & λ sont égaux par l'Hypothese. Donc par le VIII.e Axiôme, les deux consequens M & μ le sont aussi; ce qu'il falloit demontrer.

On prouvera sans peine la même chose, si c'est l'égalité d'un autre terme d'A à un semblable d'E, comme du 2.d au 2.d qui soit supposé inconnu; car alors l'égalité des deux dernieres Raisons qui sera manifeste par l'Hypothese, prouvera celle des deux premieres; & l'egalité des deux premieres dont les antecedens sont égaux par l'Hypothese, prouvera l'égalité des deux consequens qui seront le 2.d terme d'A, & le 2.d d'E.

I. Corollaire.

Ce theoréme ne laisse pas d'estre vray quand les 3 termes d'une proportion égaux châcun à châcun à 3 termes de l'autre, ne seroient pas dans le même ordre dans l'une & dans l'autre, pourvû que les deux moyens de l'une soient égaux, ou aux deux moyens de l'autre, ou aux 2 extremes; car alors il sera aisé en transposant les termes de l'une, de faire que les termes égaux se repondent dans l'une & dans l'autre selon ce qui a été dit. I.

II Corollaire.

Si deux proportions A & E étoient continuës, les deux moyennes proportionnelles étant égales, l'un des extremes d'A, ne pourroit estre égal à l'un des extremes d'E, que l'autre extreme d'A ne fût égal à l'autre extreme d'E. II.

XII. Theoréme.

Plusieurs Raisons étant égales, tous les a- LII.

antecedens sont à tous les consequens, comme un des antecedens à son consequent. Comme deux Raisons estant égales, l'antecedent est à l'antecedent, comme le consequent au consequent; ainsi 4 Raisons [ou tant que l'on voudra] estant égales, le premier antecedent est au dernier antecedent, comme le 1 consequent au dernier; & le 2.d antecedent au dernier antecedent, comme le 2.d consequent au dernier; & ainsi de suite jusques au dernier antecedent qui sera à soy-même, comme le dernier consequent à soy-même.

Donc les 4 Raisons de châcun des quatre antecedens au dernier antecedent, sont égales aux 4 Raisons de châcun des 4 consequens au dernier consequent, châcune à châcune; c'est à dire que si ces 4 Raisons égales, sont

$\frac{B}{A}, \frac{C}{E}, \frac{D}{I}, \frac{F}{O}, \frac{B}{F}, \frac{C}{F}, \frac{D}{F}, \frac{F}{F}$, seront égales chacune

à chacune à $\frac{A}{O}, \frac{E}{O}, \frac{I}{O}, \frac{O}{O}$

Or ces Raisons des 4 antecedens au dernier antecedent sont la même chose que la Raison des 4 antecedens, joints avec le signe de plus au dernier antecedent, c'est à dire la même chose que

$\frac{B + C + D + F}{F}$

Et les 4 Raisons des 4 consequens au dernier consequent, sont la même chose que l'unique Raison $\frac{A + E + I + O}{O}$

Donc B + C + D + F est à F, comme A + E + I + O est à O.

Donc *Alternando*, les 4 antecedens sont aux 4 consequens, comme F dernier antecedent est à O dernier consequent.

SE-

SECTION DEUXIE'ME.

Des Raisons tant d'égalité que d'inégalité qui peuvent étre entre diverses Raisons, quand les termes de l'une sont multipliables par ceux de l'autre.

AVERTISSEMENT.

On croit ordinairement que les grandeurs de divers genre qu'on appelle Heterogenes, ne se peuvent pas multiplier. Cela ne me paroit pas vray, ou a besoin d'explication; car les nombres sont d'un autre genre que les autres grandeurs comme l'étenduë & le tems; & neantmoins il est clair que les nombres multiplient toutes sortes de grandeurs, & que c'est une veritable Multiplication, quand je dis 6 toises ou 6 heures; puisque c'est prendre une toise ou une heure autant de fois qu'il y a d'unitez dans 6, en quoy consiste la Multiplication. LIII.

De plus ce qui ne se peut multiplier par la nature, se peut multiplier par une fiction d'esprit, par laquelle la verité se découvre aussi certainement que par les Multiplications réelles; ainsi voulant sçavoir quel chemin fera en dix heures celuy qui a fait 24 lieuës en 8 heures: je multiplie par une fiction d'esprit 10 heures par 24 lieuës, ce qui me donne un produit imaginaire d heures & de lieuës de 240; qui estant divisé par 8 heures me donne 30 lieuës. On multiplie aussi par la même fiction d'esprit des surfaces par des surfaces, quoique cela donne pour produit une étenduë de 4 dimensions qui ne peut estre dans la nature, & neantmoins on ne laisse pas de découvrir beaucoup de veritez par ces sortes de multiplications.

Ie sçay bien qu'on dit que c'est parce que ces produits

duits imaginaires se peuvent reduire en lignes qui auront même Raison entr' elles que ces produits; mais il n'y a guere d'apparence que la verité de ces sortes de preuves depende de ces lignes, qui sont visiblement étrangeres à ces demonstrations. Quoy qu'il en soit ne me voulant broüiller avec personne, chacun prendra ce que je diray des Raisons qui se trouvent entre diverses raisons qu'on ne connoit qu'en multipliant les termes de l'une par ceux de l'autre, selon l'opinion qu'il aura que les termes de certaines raisons, sont ou ne sont pas multipliables les uns par les autres; car ce n'est que dans cette suppositionque tout ce que je m'en vais dire se doit entendre.

I. Lemme.

XIV. On a déja veu dans le Livre precedent que deux grandeurs ont été multipliées l'une par l'autre, quand l'unité est à l'une comme l'autre est au Produit, c'est à dire à ce qui s'est fait par cette Multiplication; Ainsi 3 multipliez par 4 donnent 12, parce que $1, 3 :: 4. 12$; & un tiers multiplié par un quart donne un douziéme, parce que $1. \frac{1}{3} :: \frac{1}{4}. \frac{1}{12}$. l'unité étant triple du tiers comme le quart est triple du douziéme; & de même generalement quand B & X estant multipliez donnent BX, il faut que $I. X. :: B. BX.$

II. Lemme.

XV. Il s'ensuit de là que toute Grandeur étant multipliée par un autre, la Grandeur simple est à soy-même multipliée comme l'unité est à l'autre Grandeur par laquelle elle a été multipliée, $B. BX. :: I. X.$ Ce n'est que transposer les deux Raisons qui se doivent trouver en toute Multiplication.

III. Lem.

III. Lemme.

Deux Grandeurs étant multipliées par une même Grandeur : si elles sont égales, leurs Produits seront égaux ; & si les Produits sont égaux, elles seront égales. Soient B & D deux Grandeurs égales : Je dis que BX & DX sont égaux ; car par le premier Lemme LXVI.

I. X. ∴ { B. BX / D. DX } donc B. BX :: D. DX. Par le VI.ᵉ Axiôme. Donc si les Grandeurs B & D sont égales, les Produits BX & DX le sont aussi par le VIII.ᵉ Axiôme ; & si les Produits BX & DX sont égaux, les grandeurs B & D le sont aussi par le même VIII.ᵉ Axiôme.

IV. Lemme.

Lorsque deux Grandeurs étant multipliées l'une par l'autre font un Produit, & que 2 autres en font une autre, comme par exemple BS & DT: On y peut remarquer 3 sortes d'égalitez. La 1.ʳᵉ & la 2.ᵈᵉ les égalitez de châcune des deux Grandeurs d'une part à châcune des Grandeurs de l'autre, de B à D & S à T. la 3.ᵉ l'égalité des deux Produits BS & DT ; or deux de ces égalitez étant données donnent la 3ᵉ ; c'est à dire que si châcune des deux Grandeurs d'une part est égale à châcune des deux Grandeurs de l'autre, les Produits sont égaux. LVII.

2. Et si ce sont les 2 Produits qui sont supposez égaux, & qu'une des Grandeurs d'une part, soit égale à une de l'autre part, les deux autres Grandeurs sont égales.

Preuve du premier cas. La double Hypothese de B égal à D, & d'S égale à T, fait voir par le 3.ᵉ Lemme que BS = DS = DT ; donc BS = DT ; ce qu'il falloit demontrer.

Preuve du 2.d cas. Par la double Hypothese de BS égal à D T, & de B égal à D, en se souvenant du 3.e Lemme, B S = D T = B T; donc B S = BT; donc par le 3.e Lemme S = T ce qu'il falloit demontrer.

I. Proposition Generale.

LVIII. Si les deux termes d'une Raison sont multipliez par une même grandeur, la Raison des termes simples est égale à celle des termes multipliez. B.C :: BM. CM, ou $\frac{B}{C} = \frac{BM}{CM}$

I. Demonstration.

Par le 2.d Lemme B. B M. } C. C M. } :: I. M; donc B. BM :: C. C M, donc *Alternando* B.C. :: B M. CM.

II. Demonstration.

Toutes les Aliquotes pareilles des antecedens B & B M sont également contenuës dans les consequens C & C M.

Car soit X, l'Aliquote quelconque de B, & si l'on veut la centiéme: 100 X seront la même chose que B.

Donc par le 3.e Lemme ce sera la même chose de multiplier cent X par M que de multiplier B par M; donc B M & 100 fois X M sont la même chose; donc X & X M sont les Aliquotes pareilles des antecedens B. & B M.

Supposé maintenant que X soit dans C, ou tant de fois sans reste, ou toûjours avec quelque reste; qu'il y soit, par exemple 87 fois precisement, ou 87 fois plus R.

Ce sera la même chose de multiplier C par M, que

que de multiplier par M, ou 87 fois X précisement, [ce qui donne 87 X M,] ou 87 X + R [ce qui donne 87 X M + R M.] Donc C M est la même chose que

Ou 87 X M,

Ou 87 X M + R M.

Comme donc il est clair par les proportions naturellement connuës, & par le 1.re Theor. que 100 X. 87 X :: 100 X M. 87 X M; ou 100 X. 87 X + R :: 100 X M. 87 X M + R M: il est clair aussi que B [égal à 100 X] est à C [égal à 87 X ou à 87 X + R] comme B M [égal à 100 X M] est à C M [égal à 87 X M ou à 87 X M + R M; c'est a dire que B. C. :: B M. C M; ce qu'il falloit demontrer

Corollaire.

Quand des Grandeurs de plusieurs dimensions, & qui en ont autant l'une que l'autre, font une Raison : les mêmes lettres qui se trouveront dans l'une & dans l'autre de ces Grandeurs, étant ôtées de part & d'autre une pour une, ce qui restera, donnera la même Raison en termes plus simples. Que s'il ne restoit rien, ces Raisons seroient entr'elles comme 1 à 1. BM. CM :: B. C. BB. B C :: B. C. BCM. BCN :: M. N. DFG. DPG :: F. P. RST. TRS :: 1. 1. LIX.

Probleme.

Ayant deux Raisons quelconques, faire que demeurant les mêmes, elles ayent même consequent? Il ne faut que multiplier les deux termes de châcune par le consequent de l'autre. LX.

Par là elles demeureront châcune de même qu'elles étoient auparavant, par la proposition precedente; & elles auront pour consequent commun les produits des deux consequens, $\frac{B}{C} \cdot \frac{M}{N} :: \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{CN}$.

 II. Pro-

II. PROPOSITION GENERALE.

Pour connoître la Raison que des raisons quelconques ont entr'elles

LXI. DEUX Raisons quelconques sont entr'elles, comme le Produit des extremes, [c'est à dire du premier antecedent par le 2.d consequent] est au Produit des moyens, [c'est à dire du 2.d antecedent par le premier consequent,] $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}$: : BN. CM.

Car par le precedent Probleme, on reduit les deux Raisons données à n'avoir qu'un même consequent, en donnant pour antecedent à la premiere le Produit des extremes, & à la seconde le Produit des moyens, & à châcune pour consequent le Produit des consequens.

Donc par le 4.e Axiôme n'aiant qu'un consequent, elles sont comme les antecedens, & par consequent comme le Produit des extrémes qui est l'antecedent de la premiere, au Produit des moyens qui est l'antecedent de la seconde. $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}$: : $\frac{BN}{CN}$. $\frac{C}{C}\frac{M}{N}$: : BN. CM.

I. THEORÉME.

LXII. DEUX Raisons quelconques sont entr'elles comme la Raison des antecedens à celle des consequens. $\frac{B}{C}.\frac{M}{N}$: : $\frac{B}{M}.\frac{C}{N}$.

Car cette nouvelle comparaison laissant les mêmes extremes B & N, ne fait que transposer les moyens C & M; donc ces deux nouvelles Raisons sont encore entr'elles comme le Produit des mêmes extremes au Produit des mêmes moyens.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{B}{C}.\frac{M}{N}.\\ \frac{B}{M}.\frac{C}{N}.\end{array}\right\} : : \text{BN. CM.}$$

II. THEORÉME.

DEUX Raiſons quelconques ſont entr'elles, comme ces mêmes Raiſons renverſées priſes dans un ordre renverſé. LXIII.

J'appelle Raiſons renverſées quand de l'antecedent on en fait le conſequent, & du conſequent l'antecedent. Je dis donc que $\frac{B}{C} \cdot \frac{M}{N} :: \frac{N}{M} \cdot \frac{C}{B}$; car il faut prendre ces Raiſons renverſées dans un ordre renverſé, afin que ce ſoit toujours les mêmes extremes & les mêmes moyens.

$$\left.\begin{matrix} \frac{B}{C} \cdot \frac{M}{N} \cdot \\ \frac{N}{M} \cdot \frac{C}{B} \cdot \end{matrix}\right\} \therefore BN.CM.$$

AVERTISSEMENT.

TOUTES les Raiſons d'égalité étant égales, elles ont toutes même raiſon à quelque raiſon que ce ſoit, & ainſi on peut prendre celle que l'on veut à diſcretion, & les demonſtrations pour l'ordinaire en ſont plus ſenſibles, quand on prend celle du conſequent au conſequent de la Raiſon d'inégalité, avec laquelle on compare cette Raiſon d'égalité. LXIV.

III. THEORÉNE.

LA Raiſon d'égalité eſt à une Raiſon quelconque d'inégalité, comme le conſequent de la Raiſon d'inégalité eſt à ſon antecedent. LXV.

1.re Demonſtr. $\frac{X}{X} \cdot \frac{B}{C} :: X\ C.\ X\ B :: C.B.$

2.de Demonſtr. $\frac{C}{C} \cdot \frac{B}{C} :: C.B.$

Et toute Raiſon d'inégalité eſt à la Raiſon d'égalité, comme l'antecedent de la Raiſon d'inégalité eſt à ſon

ſon conſequent. $\frac{B}{C}. \frac{X}{X}. :: BX. CX :: B. C.$

Autrement $\frac{B}{C}\ \frac{C}{C}. :: B. C.$

I. Corollaire.

LXVI. La Raiſon d'égalité eſt plus grande qu'aucune Raiſon de moindre inégalité, & plus petite qu'aucune Raiſon de plus grande inégalité : car elle eſt à châcune, comme le conſequent de châcune eſt à ſon antecedent ; donc la Raiſon d'égalité eſt plus grande qu'aucune Raiſon de moindre inégalité.

On prouvera de la même ſorte qu'elle eſt plus petite qu'aucune Raiſon de plus grande inégalité, parce que le conſequent de toute Raiſon de plus grande inégalité eſt plus petit que ſon antecedent.

Cela ſevoit encore plus groſſierement en prenant pour Raiſon d'égalité celle du conſequent au conſequent de la Raiſon avec laquelle on la compare ; car il eſt clair que la Raiſon de 4 à 4 eſt plus grande que la Raiſon de 3 à 4, parce qu'ayant même conſequent celle d'égalité a un plus grand antecedent $\frac{4}{4}, \frac{3}{4}$; & il eſt clair auſſi par le même principe que la Raiſon de 3 à 3 eſt plus petite que la Raiſon de 4 à 3. $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}.$

II. Corollaire.

LXVII. La Raiſon d'égalité eſt moyenne proportionnelle entre deux Raiſons, dont l'une eſt l'inverſe de l'autre, ou l'inverſe d'une Raiſon égale à l'autre. $\frac{B}{C}. \frac{C}{C}. :: \frac{B}{B}. \frac{C}{B}$; que ſi $\frac{F}{G}$ eſt égale à $\frac{B}{C}$, $\frac{G}{F}$ ſera auſſi égale à $\frac{C}{B}$, & par conſequent $\frac{B}{C}. \frac{C}{C}. :: \frac{F}{F}, \frac{G}{F}.$

III. Corollaire.

LXVIII. La Raiſon de moindre inégalité eſt d'autant plus grande, & la raiſon de plus grande inégalité eſt

d'autant

d'autant plus petite que l'une & l'autre approche plus de la Raiſon d'égalité. J'en laiſſe à trouver la demonſtration qui ſe tire ſans peine du Theoréme precedent.

II. THORÉME.

SI les deux termes d'une Raiſon ſont multipliez par deux nouvelles grandeurs, l'antecedent par l'une, & le conſequent par l'autre: LXIX.

La Raiſon des termes ſimples, eſt à la Raiſon des termes multipliez, comme la Grandeur qui a multiplié le conſequent, à celle qui a multiplié l'antecedent. $\frac{b}{c}$. $\frac{bm}{cn}$ :: BCN. BMC :: N. M.

COROLLAIRE.

LA Raiſon des Racines eſt à la Raiſon des Quarrez comme la derniere Racine eſt à la premiere. $\frac{b}{c}$. $\frac{bb}{cc}$ :: C. B; & la Raiſon des Quarrez eſt à celle des Racines, comme la premiere racine eſt à la derniere, $\frac{bb}{cc}$. $\frac{b}{c}$ :: B. C. LXX.

AVERTISSEMENT.

ON jugera ſans peine par là de ce qu'eſt la Raiſon des Racines à la Raiſon des Cubes. $\frac{b}{c}$. $\frac{bbb}{ccc}$ :: CC. BB. LXXI.

III. THEORÉME.

SI ayant deux Raiſons quelconques, j'en fais une troiſiéme qui ait pour antecedent le produit des antecedens des deux premieres, & pour conſequent le produit de leurs conſequens: châcune des premieres eſt à la troiſiéme comme le conſequent de l'autre eſt à ſon antecedent; c'eſt à dire que la LXXII.

pre-

sont entr'eux comme le produit des antecedens est au produit des consequens. BB. CC :: BF. CG ; car BBCG = CCBF.
CB étant commun à l'un & à l'autre, & BG du premier étant égal à CF du second.

IV. Corollaire.

LXXVII. 4 Grandeurs étant proportionnelles, leurs Quarrez le sont aussi. Si B. C. :: F. G.
BB. CC. :: FF. GG ; car BBGG = CCFF. le premier étant le Quarré de BG, & le second de CF.

V. Corollaire.

LXXVIII. Quatre nombres étant proportionnels, le produit des quatre multipliez l'un par l'autre est necessairement un nombre quarré, qui a pour sa racine le Produit des extrémes ou celui des moyens, qui est la même chose ; car le produit des quatre nombres proportionnels, est la même chose que le produit des extrémes multiplié par le produit des moyens. 2. 3 :: 4. 6. 2 fois 6 (12) par 3 fois 4 (12) font 12 fois 12 ; c'est à dire 144 ; & c'est absolument la même chose que de dire, 2 fois 3 font 6, 4 fois 6 font 24, 6 fois 24 font 144.

VI. Corollaire.

LXXIX. On prouve aisément par ce 4.e Theoréme, ce qui a été dit cy-dessus, que quatre grandeurs étant proportionnelles, comme B. C :: F. G: si on en ajoûte 2 autres quelconques comme M & N, les quatre Raisons suivantes sont proportionnelles $\frac{c}{m}$. $\frac{n}{f}$. : : $\frac{b}{m}$ $\frac{n}{g}$; car par la proposition generale, les deux premieres Raisons sont entr'elles comme CF est à MN, & les deux dernieres comme BG est à MN.

Or

Or par le Theoréme precedent C F $=$ B G; donc C F. M N. : : B G. M N; donc $\frac{c}{m} . \frac{n}{f} : : \frac{b}{m} . \frac{n}{g}$; ce qu'il falloit demontrer.

V. THEOREME.

SI les deux moyens d'une proportion sont égaux LXXX.
aux deux moyens d'une autre proportion, & que l'un des extrémes de l'une soit égal à l'un des extrémes de l'autre: l'autre extréme sera aussi égal à l'autre extréme; & il n'importe ni que les deux moyens supposez égaux de part & d'autre ne soient pas placez de même dans ces deux proportions [comme si c'est le 1.er des moyens de la proportion A qui soit égal au 2.d des moyens de la proportion C, & le second d'A au premier de C] ni que ce soit le 1.er des extrémes d'A qui soit supposé égal au dernier de C, les deux extrémes d'A & de C n'en seront pas moins égaux.

Demonstr. Les deux moyens d'A estant égaux aux deux moyens de C: le produit des moyens d'A sera égal au produit des moyens de C, par le 4.e Lemme. Or dans châque proportion le produit des moyens est égal au produit des extrémes.

Donc les produits des extrémes d'A & de C sont égaux aussi.

Or par le 4.e Lemme, supposé que l'un des extrémes d'A quel qu'il soit, soit égal à l'un des extrémes de C quel qu'il soit aussi: l'autre extreme d'A, sera égal à l'autre extreme de C.

COROLLAIRE.

SI A & C étoient deux proportions continuës, LXXXI.
les deux moyennes proportionnelles étant égales, l'un des extrémes d'A, ne pourroit étre égal à l'un des extrémes de C, que les deux autres extrémes d'A

d'A & de C ne fussent aussi égaux. Ce qui est prouvé dans ce Theoréme & ce Corollaire, l'a déja été plus haut d'une autre façon.

DES RECIPROQUES.

LXXXII. Deux Grandeurs sont dites étre reciproques à deux autres, quand les unes sont les extrémes d'une proportion, & que les autres en sont les moyens. Ainsi dans la proportion B. C. :: F. G. B & G sont reciproques à C & F; & il est clair, par ce qui vient d'étre dit, que quand deux grandeurs sont reciproques à deux autres, le produit des unes est égal au produit des autres. Que s'il n'y a que trois Grandeurs dans une proportion, parce qu'elle est continuë, celui du milieu qui sert de consequent à la premiere Raison, & d'antecedent à la seconde, est appellé ***moyenne proportionnelle***, & alors le Quarré de cette Grandeur est égal au produit des autres Grandeurs. Si B. D. :: D. H: BH = DD.

VI. Theoreme.

LXXXIII. Si deux Grandeurs châcune de deux dimensions, sont égales: l'une des dimensions de la premiere est à l'une des dimensions de la seconde, comme l'autre dimension de la seconde est à l'autre dimension de la premiere. Si B G est égal à CF, B sera à C comme F à G; c'est une suitte manifeste de ce qui vient d'étre dit.

VII. Theoreme.

LXXXIV. Si deux Grandeurs d'une part, & deux autres d'une autre, sont châcune reciproques à deux autre Grandeurs, elles seront reciproques entr'elles Si B & G sont reciproques à P & Q; [c'est à dire

dire si B. P. :: Q. G,] & que S & T soient aussi reciproques à P & Q; [c'est à dire si S. P. :: Q. T:] B & G seront aussi reciproques à S & T; [c'est à dire que B. S :: T. G.] Car le premier ne peut étre, que le produit B G ne soit égal au produit P Q; & le second ne peut étre, que le produit S T ne soit égal au même produit P Q, auquel le produit B G étoit égal. Donc les deux produits B G & S T sont égaux entr'eux, parce qu'ils sont châcun égal à un troisiéme. Donc les Grandeurs B & G sont reciproques aux Grandeurs S & T.

COROLLAIRE.

QUATRE Grandeurs étant proportionnelles, si la 1.re est à une 5.e comme une 6.e est à la 4.e; la 2.de sera aussi à la 5e, comme la 6.e à la 3.e; car il est clair par l'Hypothese que la 1.re & la 4e. sont reciproques à la 5.e & à la 6.e Or la 2.de & la 3.e sont aussi reciproques à la 1.re & à la 4.e: elles le sont donc aussi à la 5.e & à la 6.e Soient les 4 proportionnelles B, C, F, G, & les deux autres P, Q. LXXXV.

Si B. C. :: F. G.
& B. P. :: Q. G.
C. P. :: Q. F.



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TROISIE'ME.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

Où l'on fait voir aussi comment on peut faire sur les Raisons les quatre Operations communes, Ajoûter, Soustraire, Multiplier, Diviser.

1. *ON ne s'est point encore avisé, que je sçache, de faire sur les Raisons les 4 Operations communes Ajoûter, Soustraire, Multiplier & Diviser, que l'on fait sur les autres Grandeurs; cependant la maniere dont nous avons expliqué la nature de la Raison dans le Livre precedent, fait voir que cela se peut faire sans peine, & voicy comment:*

I. LEM-

I. LEMME.

Pour l'Addition & la Soustraction.

Nous avons déja veû N 47. que quand deux Raiſons ont le même conſequent, la Raiſon qui a pour antecedent le premier antecedent plus ou moins le ſecond, & pour conſequent le conſequent commun, eſt, ou la ſomme des deux Raiſons, c'eſt à dire l'une plus l'autre, ou la difference de ces deux Raiſons, c'eſt à dire la premiere moins la ſeconde. $\frac{B}{X}, \frac{D}{X}; \frac{B+D}{X}, \frac{B-D}{X}; \frac{5}{7}, \frac{3}{7}; \frac{5+3}{7}, \frac{5-3}{7}$; delà s'enſuit que II.

ADDITION.

Pour ajoûter enſemble deux Raiſons quelconques, il ne faut que les reduire à un même conſequent. La Raiſon des nouveaux antecedens joints par le ſigne de Plus au commun conſequent, eſt la ſomme de ces deux Raiſons données, ou l'une ajoûtée à l'autre. III.

$$\left\{ \frac{BS}{DT}, \frac{BT}{DT}; \frac{DS}{DT}; \frac{BT+DS}{DT} \right.$$

$$\left\{ \frac{74}{59}, \frac{63}{45}; \frac{20}{45}; \frac{63+20}{45} \right.$$

Autrement; la Raiſon qui a pour antecedent le produit des extrémes, plus le produit des moyens, & pour conſequent le produit des conſequens, eſt la ſomme de ces deux Raiſons données.

SOUSTRACTION.

Pour ſouſtraire une Raiſon quelconque d'une autre qui ſoit plus grande: Il faut de même les IV.

reduire à un même conſequent; & alors la Raiſon du plus grand antecedent, moins le plus petit, au conſequent, eſt la difference de ces deux Raiſons, ou la plus grande moins la plus petite $\frac{b}{d}, \frac{s}{c}; \frac{bc}{dc}, \frac{ds}{dc}; \frac{bc-ds}{dc}$. $\frac{7}{5}, \frac{4}{9}; \frac{63-20}{45}$.

Autrement; ajant mis la plus grande Raiſon la premiere, la Raiſon qui aura pour antecedent le produit des extremes moins le produit des moyens, & pour conſequent le produit des conſequens, eſt la difference de ces deux Raiſons ou la plus grande moins la plus petite.

AVERTISSEMENT.

On voit par là que ce que les Geomettres appellent Compoſition & Diviſion, quand ils diſent que quatre Grandeurs étant proportionnelles: Componendo *ou* Dividendo, *la* 1.^r^ *plus ou moins la* 2.de *eſt à la* 2.de *comme la* 3.e *plus ou moins la* 4.e *eſt à la* 4.e *a dû être plûtoſt appellé Addition & Souſtraction, & qu'on a dû dire que cela ſe fait* addendo *ou* ſubtrahendo; *& c'eſt ainſi que nous avons reſolu de l'appeller dans le reſte de ces Elemens.*

II. LEMME.

V. POUR *la Multiplication & la Diviſion.*

Comme dans les Grandeurs abſoluës, on a multiplié deux Grandeurs l'une par l'autre, quand l'unité eſt à l'une de ces Grandeurs, comme l'autre eſt à ce qui eſt né de cette Multiplication qu'on appelle le *Produit*; & qu'on a diviſé une Grandeur par une autre, quand la Grandeur qui diviſe eſt à celle à diviſer, ce qu'eſt l'unité à ce qui eſt né de cette Diviſion qu'on appelle le *Quotient*:

Il faut auſſi que dans les Grandeurs relatives qui s'appellent *Raiſons*, on ait multiplié deux Raiſons l'une par l'autre, quand ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives eſt à l'une des Raiſons, comme l'autre eſt à la Raiſon qui eſt née de cette Multiplication; Et

Et qu'on ait divisé une Raison par une autre quand la Raison qui a dû diviser est à celle à diviser, comme est ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives à la Raison qui est née de cette Division.

Or ce qui tient lieu d'unité dans les Grandeurs relatives, c'est à dire dans les Raisons, ne peut étre autre chose que la Raison d'égalité qui est celle où l'antecedent est égal au consequent comme $\frac{6}{6}, \frac{1}{1}$. Cela est clair de soy-même, & se prouve encore par l'analogie des fractions qui ont un parfait raport aux Raisons comme on l'a déja souvent observé.

Car dans les fractions, celle dont le numerateur est le même nombre que le dénominateur [ce qui revient entierement à la raison d'égalité] est la même chose que l'unité, deux moitiés $\frac{2}{2}$, trois tiers $\frac{3}{3}$, quatre quarts $\frac{4}{4}$ n'étant que l'unité diversement exprimée.

Cela étant supposé, il est trés-facile de multiplier & de diviser les Raisons :

Multiplication de deux Raisons.

On a multiplié deux Raisons quand on a fait une Raison qui a pour antecedent le produit des antecedens & pour consequent le produit des consequens. Ayant les deux Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, elles se trouveront multipliées par la Raison de $\frac{bm}{cn}$. VI.

Pour le prouver il ne faut que montrer que la Raison d'égalité est à la Raison $\frac{b}{c}$ comme la Raison $\frac{m}{n}$ est à la Raison $\frac{bm}{cn}$; c'est à dire que $\frac{c}{c} . \frac{b}{c} :: \frac{m}{n} . \frac{bm}{cn}$.

Ce qui est facile: Car par 11. 24. $\frac{c}{c}\frac{b}{c}$ :: c. b.

& par 11. 69. $\frac{m}{n}.\frac{bm}{cn}$: : c. b.

donc $\frac{c}{c}.\frac{b}{c}::\frac{m}{n}.\frac{bm}{cn}$.

Division d'une Raison par une autre.

On a divisé une Raison par une autre, quand ayant mis la premiere celle qui doit diviser l'autre, on a fait une Raison qui a pour antecedent le produit des moyens, c'est à dire le produit du consequent de la Raison qui tient lieu de diviseur par l'antecedent de l'autre, & pour le consequent le produit des extremes; ainsi $\frac{b}{c}$ a divisé $\frac{m}{n}$, quand on a la Raison de $\frac{cm}{bn}$. Pour le prouver il faut demontrer que la Raison $\frac{b}{c}$ est à la Raison $\frac{m}{n}$ comme la Raison d'égalité est à la Raison de $\frac{cn}{bm}$, c'est à dire que $\frac{b}{c}.\frac{m}{n}::\frac{x}{x}.\frac{cm}{bn}$. Or cela est facile: car par 11. 61. $\frac{b}{c}.\frac{m}{n}$ :: bn. cm. Or par 11. 65. $\frac{x}{x}.\frac{cm}{bn}$ :: bn. cm. donc $\frac{b}{c}.\frac{m}{n}::\frac{x}{x}.\frac{cm}{bn}$.

Probleme.

VII. Ayant trois Raisons quelconques, en trouver une quatriéme pour proportionnelle: Soient les trois Raisons quelconques $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{f}$, $\frac{m}{n}$, les deux du milieu étant multipliées l'une par l'autre, ce qui fait $\frac{dm}{fn}$, si on divise cette nouvelle Raison par la premiere, ce qui donne $\frac{c}{b}\frac{d}{f}\frac{m}{n}$: cette derniere Raison est la quatriéme proportionnelle au regard des trois autres; c'est à dire que $\frac{b}{c}.\frac{d}{f}::\frac{m}{n}.\frac{cdm}{bfn}$.

Car $\frac{b}{c}.\frac{d}{f}$ :: B F. C D. par 11. 61. & $\frac{m}{n}.\frac{cdm}{bfn}$ :: BF, CD par 11. 69.

Ob-

OBSERVATION.

CE *que font ces quatre regles sur les Raisons égales.* L'addition de deux Raisons égales fait une Raison double de châcune. Si B. C. :: F. G $\frac{bg + cf}{cg}$ est double de châcune de ces deux Raisons. VIII.

La soustraction de deux Raisons égales donne zero pour l'antecedent, & par consequent le réduit à rien.

$$\text{Si B. C. :: F. G. } \frac{BG - CF.}{CG} = \frac{0}{cg}.$$

Car $BG = CF$, donc l'un moins l'autre n'est rien.

La multiplication de deux Raisons égales fait une Raison composée des deux, qui s'appelle Raison doublée, dont on va parler bien-tost.

La division d'une Raison par une autre qui luy est égale, donne une Raison d'égalité. Si $\frac{b}{c}$ est égale $\frac{f}{g}$: $\frac{b}{c}$ divisant $\frac{f}{g}$ donne $\frac{cf}{bg}$, qui est une Raison d'égalité, parce que $CF = BG$.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

CE qui vient d'être dit de la multiplication des Raisons fait comprendre sans peine ce que c'est que la Raison composée; ce qui n'a point encore éte bien expliqué par aucun Geometre. IX.

Car au lieu d'en donner une definition generale, ils se sont contentez d'apporter l'exemple d'une Raison composée dans un cas particulier, comme si on n'eût pû avoir d'autre notion plus claire, plus distincte & plus universelle de la Raison composée.

„Lors, disent-ils, qu'ayant deux grandeurs on „en prend une troisiéme telle que l'on veut, &

„ que l'on compare la premiere des grandeurs données à cette troisiéme, & cette troisiéme à la „ seconde des données : la Raison des deux grandeurs „ données est composée de deux Raisons, de la „ premiere grandeur à l'interposée & de l'interposée „ à la seconde ; ainsi la Raison de B à D est composée „ des Raisons de B à X & d'X à D.

Or il est aussi ridicule de ne dire que cela pour expliquer la nature de la Raison composée, que si on se contentoit de dire pour définir la proportion Geometrique, que quand la premiere grandeur est double de la seconde, & la troisiéme double de la quatriéme, cela s'appelle *proportion*.

Car comme cette définition de la proportion seroit vicieuse, parce qu'elle ne comprendroit pas tout le défini : celle qu'ils donnent de la Raison composéé ne l'est pas moins ; parce que bien loin de convenir à toute Raison composée, ce n'est qu'un abregement dans un cas particulier de la maniere dont se forment les Raisons composées, comme on le verra plus bas. Voicy donc en general ce que c'est que Raison composée :

DEFINITION DE LA RAISON COMPOSÉE.

X. LA composition des Raisons n'est autre chose que leur multiplication ; & une Raison qui est née de la multiplication de deux ou plusieurs Raisons, est dite composée de ces deux ou plusieurs Raisons.

C'est pourquoi, suivant ce qu'on a dit de la multiplication, & y ajoûtant seulement les termes de Composante & de Composée, une Raison est composée de deux Raisons quand la Raison dégalité est à l'une des composantes, comme l'autre composante est à la Raison composée.

PRO-

Proposition generale.

ou

I. Theoréme.

La Raison qui a pour antecedent le produit de tous les antecedens de plusieurs raisons, & pour consequent le produit de tous les consequens, est composée de toutes ces Raisons : ainsi la Raison de $\frac{bmp}{cnq}$ est composée des trois Raisons $\frac{b}{c}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$. XI.

On ne peut le demontrer qu'en commençant par deux Raisons, & en faisant voir d'abord que $\frac{bm}{cn}$ est composée des Raisons $\frac{b}{c}$ $\frac{m}{n}$.

Or il ne faut pour cela que prouver que la Raison d'égalité est à $\frac{b}{c}$ comme $\frac{m}{n}$ est à $\frac{bm}{cn}$; ce qu'on a déja fait en expliquant la Multiplication.

Et quand cela est fait des deux premieres, on prouvera de la même sorte que $\frac{bmp}{cnq}$ est composée de toutes les trois ; en faisant voir qu'elle est composée de $\frac{bm}{cn}$ [qui l'est des deux premieres] & de la la troisiéme $\frac{p}{q}$. Car $\frac{x}{x}$. $\frac{bm}{cn}$. : : *cn. bm.* par 11. 65. & $\frac{p}{q}$, $\frac{bmp}{cnq}$: : *cn. bm.* par 11. 69. Donc $\frac{x}{x}$. $\frac{bm}{cn}$. : : $\frac{p}{q}$. $\frac{bmp}{cnq}$; & par consequent $\frac{bmp}{cnq}$ est composée de $\frac{p}{q}$ & $\frac{bm}{cn}$, laquelle l'est de $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, & ainsi l'est de toutes les trois $\frac{b}{c}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$.

Suite importante de la vraye notion de la Raison composée.

II. Theoréme.

La veritable notion de la Raison composée étant une fois établie, qui est la Raison du produit des XII.

antecedens de deux ou plusieurs Raisons au produit de leurs consequens, il s'ensuit de là une chose fort remarquable ; c'est que lors qu'il se rencontre dans les Raisons composantes des antecedens égaux aux consequens, il faut les ôter un pour un, avant que de former les produits des antecedens & des consequens, qui doivent faire l'antecedent & le consequent de la Raison composée, si on veut qu'elle soit réduite aux moindres termes qu'elle peut être.

Que si ces antecedens & consequens égaux étant ôtez, il ne restoit qu'un antecedent & un consequent dans les Raisons composantes, cét antecedent & ce consequent feront toute la Raison composée ; & s'il ne restoit rien, la Raison composée seroit d'un à un, parce que ce seroit une marque que le produit des antecedens seroit égal au produit des consequens.

On verra mieux tout cela par des exemples.

XIII.

RAISONS COMPOSANTES.	RAISONS COMPOSÉES.
$\frac{b}{d}\ \frac{c}{p}\ \frac{d}{r}\ \frac{p}{ʃ}\ \frac{q}{b}$	$\frac{cq}{rʃ}$
$\frac{m}{d}\ \frac{n}{ʃ}\ \frac{ʃ}{m}\ \frac{x}{n}$.	$\frac{x}{d}$
$\frac{a}{o}\ \frac{e}{a}\ \frac{o}{e}$.	$\frac{1}{1}$

La Raison de cela, est que quand on auroit mis toutes ces lettres semblables dans le produit des antecedens & dans celui des consequens, il les en faudroit ôter pour avoir la Raison de ces produits reduite aux moindres termes qu'elle peut être, selon ce qui a été dit cy dessus. II. 59.

Il vaut donc mieux les retrancher d'abord comme

me inutiles, quand on ne veut qu'avoir la Raiſon de ces produits qui eſt la Raiſon compoſée.

On peut tirer delà divers Corollaires qui donneront une grande lumiere à toute cette matiere de la Raiſon compoſée.

I. COROLLAIRE.

Quand une de ces Raiſons compoſantes ; eſt une Raiſon d'égalité ; il ne la faut que retrancher comme inutile à la Raiſon compoſée $\frac{x}{x} \frac{b}{c} \frac{m}{n} . \frac{bm}{cn}$. $\frac{x}{x} \cdot \frac{b}{c} . \frac{b}{c}$. XIV.

II. COROLLAIRE.

QUAND les deux Raiſons compoſantes ont la même grandeur pour leurs extrémes, la Raiſon compoſée a pour ſon antecedent l'antecedent de la ſeconde Raiſon, & pour ſon conſequent le conſequent de la premiere $\frac{x}{b} \frac{d}{x} . \frac{d}{b}$. XV.

III. COROLLAIRE.

LORS qu'au contraire les deux Raiſons ont la même grandeur pour moyens [comme il arrive dans les Raiſons que nous avons dites ſe pouvoir appeller continuës,] la Raiſon compoſée a pour ſon antecedent l'antecedent de la 1.re Raiſon, & pour ſon conſequent le conſequent de la 2.de $\frac{b}{x} \frac{x}{d} . \frac{b}{d}$. XVI.

IV. COROLLAIRE.

QUAND il y a de ſuitte pluſieurs de ces Raiſons continuës égales ou inégales ; c'eſt à dire qui ſont telles que le conſequent de la precedente eſt toûjours l'antecedent de la ſuivante, la Raiſon du premier antecedent au dernier conſequent eſt com- XVII.

posée de toutes ces Raisons. $\frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{f}, \frac{f}{g}, \frac{g}{h}. \frac{b}{h}$.

V. Corollaire.

XVIII. Ce qui vient d'être dit, est la même chose que ce qu'on propose en cette maniere: Ayant plusieurs Grandeurs de suitte, la Raison de la premiere à la derniere est composée de toutes les Raisons continuës de toutes les Grandeurs, c'est à dire des Raisons de la 1.re à la 2.de & de la 2.de à la 3.e & de la 3.e à la 4.e jusqu'à la derniere: c'est la même chose que le 2.d Theoreme, & que le 3.e Corollaire s'il n'y a que trois Grandeurs; car ayant ces grandeurs *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, leurs Raisons continuës sont $\frac{b}{c} \frac{c}{d} \frac{d}{f} \frac{f}{g} \frac{g}{h}$. Donc par le 2.d Theoréme la Raison de b à h est composée de toutes ces Raisons; & s'il n'y a que trois Grandeurs *b*, *c*, *d*, la Raison de *b* à *d*, $\frac{b}{d}$, par le 3.e Corollaire est composée des deux Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{d}$.

VI. Corollaire.

XIX. Si entre deux Grandeurs données, on en interpose une ou plusieurs autres à discretion, la Raison des Grandeurs données sera composée de deux ou de plusieurs Raisons continuës que formeront ces Grandeurs données avec les interposées. Soient les données *b*, *d*, l'interposée à discretion *x*, ou si on en veut mettre plusieurs *x*, *y*, *z*; ce qu'on a dit de 3 Grandeurs ne peut pas n'être point vray de *b*, *x*, *d*.

VII. Corollaire.

XX. Deux Raisons étant égales, si on en renverse une en faisant l'antecedent du consequent, & le con-

consequent de l'antecedent, la Raison composée de ces deux Raisons, dont l'une est renversée est une Raison d'égalité. J'en laisse à trouver la demonstration.

III. Theoréme

Deux Raisons composées sont égales quand les Raisons composantes de l'une, sont égales châcune à châcune aux Raisons composantes de l'autre. XXI.

Toute raison composée est le 4.e terme d'une proportion, dont la Raison d'égalité fait le premier terme, & les deux Raisons composantes le 2.d & le 3.e; donc les Raisons d'égalité étant égales dans l'une & l'autre proportion: si les Raisons composantes d'une part sont égales aux Raisons composantes de l'autre part, les trois premiers termes de l'une sont égaux aux trois premiers termes de l'autre: & par consequent les deux Raisons composées qui en sont châcune le 4.e terme, seront égales par 11.49.

IV. Theoréme.

Si les Raisons dont une raison est composée sont toutes-deux de moindre inégalité, la composée est moindre qu'aucune des composantes. Si elles sont toutes-deux de plus grande inégalité, la composée est plus grande qu'aucune des composantes. Si l'une est de moindre inégalité, & l'autre de plus grande inégalité, l'a composée sera plus petite que celle de plus grande inégalité, & plus grande que celle de moindre inégalité. Tout cela depend de deux principes: XXII.

L'un que toute raison composée est le 4.e terme d'une proportion dont la Raison d'égalité est le premier terme & les deux composantes, le 2.d & le 3.e terme. L'autre, que la Raison composante

qui fait le 3.e terme de cette proportion est à la composée, comme le consequent de celle qui en fait le 2.d terme est à son antecedent par 11. 65, & 69. cydessus.

Donc quand l'une & l'autre composante est de moindre inégalité, le consequent de châcune étant plus grand que son antecedent, elles ne pourront être disposées de sorte que l'une & l'autre ne soit plus grande que la composée, $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}::\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{13}::3.2.$ $\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{5}::\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{13}::5.4.$ Au contraire, par le même principe quand les deux composantes sont de plus grande inégalité, le consequent de châcune étant plus petit que son antecedent, châcune aussi est plus petite que la composée. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}::\frac{5}{4}\cdot\frac{15}{8}::$ 2, 3. $\frac{1}{1}\cdot\frac{9}{4}::\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{18}::4, 5.$

Mais si l'une des composantes est de moindre inégalité, le consequent en l'une étant plus grand que l'antecedent & moindre en l'autre: la composante de plus grande inégalité sera plus grande que la composée, & celle de moindre inégalité plus petite que la composée. $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}::\frac{7}{3}\cdot\frac{14}{13}::3.2.$ $\frac{1}{1}\cdot\frac{7}{3}::\frac{2}{3}\cdot\frac{14}{13}::5.7.$

Observation sur ce Theoréme.

XXIII. On voit clairement par ce qui vient d'être demonstré dans ce Theoréme que la composition des Raisons n'en peut être une Addition, mais en doit être une Multiplication; car il est contre la nature de l'Addition que deux choses ajoûtées ensemble fassent un tout qui soit moindre que châcune: parce qu'il faudroit pour cela qu'un tout fust moindre que sa partie; mais il en est tout autrement de la Multiplication, dans laquelle il se peut faire que deux choses étant multipliées l'une par l'autre, il en naisse un produit qui soit moindre que châcune, & cela arrive toûjours quand les deux.

deux choses que l'on multiplie sont moindres châcune que l'unité, comme quand on multiplie un tiers par un quart, ce qui fait un douziéme; & c'est ce qui fait encore voir la parfaite analogie des nombres aux raisons; car il n'arrive jamais que la Raison composée soit plus petite qu'aucune des composantes, que quand châcune des composantes est de moindre inégalité, & qu'elle est par consequent plus petite que la Raison d'égalité qui tient lieu d'unité dans les Raisons.

Quand une Raison est composée de plusieurs Raisons égales, si c'est de deux, elle s'appelle doublée; de trois, triplée; de quatre, quadruplée, &c.

V. Theoréme.

S'il y a plusieurs termes en proportion continuelle, c'est à dire que le premier soit au second, comme le 2.^{d} au 3.e & le 3.e au 4.e & le 4.e au 5.e: ce qui s'appelle Progression Geometrique: la Raison d'un terme à l'autre, sera simple, ou doublée, ou triplée, ou quadruplée, &c. selon que ces termes seront distans l'un de l'autre; car s'ils se suivent immediatement, leur Raison sera simple, c'est à dire la même qui regne dans toute la Progression. XXIV.

S'il y a un terme entre-deux, qui est une moyenne proportionelle, leur Raison sera doublée, c'est à dire composée de deux Raisons simples, qui par l'hypothese sont égales.

S'il y a deux termes entre-deux, c'est à dire deux moyennes proportionnelles, leur raison sera triplée; s'il y en a trois, quadruplée; &c.

VI. Theoréme.

La Raison d'une grandeur de plusieurs dimensions à toute autre grandeur homogene d'autant de di- XXV.

dimensions, est composée de toutes les Raisons de châcune des dimensions d'une grandeur à châcune des dimensions de l'autre: ce n'est qu'une application de la definition de la Raison composée ; car comparant châcune des dimensions d'une grandeur à châcune des dimensions de l'autre, on met tous les antecedens de ces Raisons dans une des grandeurs, & tous les consequens dans l'autre. Or une Grandeur de plusieurs dimensions est la même chose que le Produit de ces dimensions multipliées l'une par l'autre; & par consequent les grandeurs sont entr'elles, comme le produit de leurs dimensions, c'est à dire comme le Produit des antecedens des Raisons de châcune des dimensions de l'une à châcune des dimensions de l'autre au Produit des consequens de ces mêmes Raisons; ce qui est une Raison composée de ces Raisons par la definition même de la Raison composée.

I. Corollaire.

XXVI. Toute Grandeur plane est à une autre Grandeur plane en raison composée des deux raisons de châcun des côtez de l'une à châcun des côtez de l'autre, c'est la même chose que la precedente.

II. Corollaire.

XXVII. Toute Grandeur solide est à une autre Grandeur solide en raison composée des trois raisons de châcun des côtez de l'un à chacun des côtez de l'autre, c'est la même chose que la proposition generale.

III. Corollaire.

XXVIII. Les Grandeurs planes & solides ayant quelqu'une de leurs dimensions égale & l'autre inégale sont entr'elles comme les inégales. *bf.bg.::f.g. bfd.bfg.::d.g. bfd. bmn.::fd.mn.*

IV. Co-

IV. Corollaire.

Les plans dont les deux dimensions ont même raison, châcune de l'un à châcune de l'autre, sont en raison doublée de cette même raison. Cela est clair par le premier Corollaire & la définition de la Raison doublée. XXIX.

V. Corollaire.

Les solides dont les trois dimensions ont même raison châcune de l'un à châcune de l'autre, sont en raison triplée de cette raison. Cela est encore clair par le second Corollaire, & la définition de la raison triplée. XXX.

VI. Corollaire.

Tous les Quarrez & les Cubes sont en raison, les uns doublée, & les autres triplée de la raison de leurs racines; car toutes les dimensions des Quarrez & des Cubes étant égales entr'elles, elles ne peuvent pas n'avoir pas châcune la même raison à châcune des dimensions des autres Quarrez & des autres Cubes. XXXI.

VII. Corollaire.

Si 4 Grandeurs sont proportionelles, leurs Quarrez & leurs Cubes le sont aussi. Si *b. c. :: f. g. bb. cc. :: ff. gg. bbb. ccc. :: fff. ggg*; car les Quarrez étant en raison doublée de leurs Racines, & leurs Cubes en raison triplée, les Raisons doublées & les triplées de Raisons égales doivent être égales par le 3.e Theoréme. XXXII.

VIII. Corollaire.

Le Produit de deux Grandeurs quelconques est XXXIII.
moyen

moyen proportionnel entre les Quarrez de châque Grandeur. Soient les Grandeurs *b* & *c*. *bb*. *bc*. :: *bc*. *cc*; car *bb*. *bc*. :: *b*. *c*. *cc* :: *b*. *c*.

C'est la même chose que de dire que le Produit de la toute & d'une partie, est moyen proportionnel entre le Quarré de la toute & le Quarré de cette partie; car il est visible que si la toute est *t* & *m* une partie: *tt*. *tm*. :: *tm*. *mm*.

IX. Corollaire.

XXXIV. En toute Progression Geometrique, les Quarrez de deux termes qui se suivent immediatement, sont entr'eux comme deux termes, entre lesquels il y en à un d'interposé. Soient ∺ *b*. *c*. *d*. *f*. *g*. en Progression Geometrique. Je dis que *bb*. *cc* :: *b*. *d* ou *cc*. *dd*. :: *c*. *f*; car la Raison de *b*. *d*. est doublée de celle de *b*. *c*. Or par le 6.e Corollaire, les Quarrez *bb* & *cc*, sont aussi en raison doublée de celle de *b*. *c*. Cela se peut prouver encore d'une autre sorte. Si ∺ *b*. *c*. *d*. *f*. *bd* = *cc*. Or *bb*. *bd* :: *b*. *d* donc *bb*. *cc* :: *b*. *d*.

X. Corollaire.

XXXV. En toute Progression Geometrique, les Cubes de deux termes qui se suivent immediatement, sont entr'eux comme deux termes entre lesquels il y en a deux d'interposez; car les Cubes sont en raison triplée de la Raison de la Progression, & les termes entre lesquels il y en a deux d'interposez, sont aussi en raison triplée de cette même raison. Cela se peut prouver aussi par le 9.eme Corollaire; car si ∺ *b*. *c*. *d*. *f*. *bb*. *cc* :: *c*. *f*.; donc *bbf* = *ccc*. Or *bbb*. *bbf* :: *b*. *f*. donc *bbb*. *ccc* :: *b*. *f*.

XI. Corollaire.

XXXVI. C'est par là qu'on a trouvé comment il s'y falloit

loit prendre pour doubler un Cube donné ; car ayant un Cube donné *bbb.* il faut prendre *f* double de *b*, & si on peut trouver deux moyennes continuëment proportionnelles entre *b* & *f*, comme seroient *c* & *d* : ensorte que ∺ *b. c. d. f:* le Cube de *c* premiere de ces moyennes proportionnelles sera double du Cube de *b*.

VII. THEORÉME. DEFINITION.

DEUX Grandeurs planes qui sont telles que les deux dimensions de l'une sont les extremes d'une proportion dont les deux dimensions de l'autre sont les moyens, ou [ce qui est la même chose] que l'une des dimensions de la premiere soit à l'une des dimensions de la seconde, comme l'autre dimension de la seconde est à l'autre dimension de la premiere, sont appellées reciproques, & sont toûjours égales. XXXVII.

Soient les plans *bg* & *cf*. Je dis que si *b* est à *c* comme *f* est à *g*, *b. c. :: f. g.* Ces deux plans sont reciproques & égaux, *bg* = *cf:* Car par II. 73. le Produit des extrémes *bg*, qui est le premier de ces deux plans, est égal au Produit des moyens *cf*, qui est le second de ces deux plans.

VIII. THEORÉME.

LES Grandeurs planes égales sont toûjours reciproques, c'est à dire les deux dimensions de l'une sont les extrémes de la proportion dont les deux dimensions de l'autre sont les moyens. Si *bg* est égal à *cf:* Je dis que *b. c :: f. g.* par II. 73. XXXVIII.



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATRIE'ME.

DES GRANDEURS COMMENSURABLES ET INCOMMENSURABLES.

I. *Nous avons dit generalement qu'il y a deux sortes de raisons ; la raison de nombre à nombre, & la raison sourde ; & comme c'est par là que les grandeurs sont commensurables & incommensurables, la suite naturelle nous oblige de parler de ces sortes de Grandeurs.*

DEFINITION.

II. C'EST la même chose de dire que deux grandeurs sont commensurables, & de dire qu'elles sont comme nombre à nombre.

Car

Car afin que *b* ſoit commenſurable à *c*, il faut que quelque grandeur comme *x* ſoit préciſément tant de fois dans *b* & préciſément tant de fois dans *c*, comme ſi elle eſt 9 fois dans *b* & 10 fois dans *c*.

Donc *b* eſt la même choſe que 9 *x*, & *c* la même choſe que 10 *x*.

Or 9 *x*. 10 *x* : : 9. 10.

Donc *b*. *c* : : 9. 10.

Donc *b* eſt à *c* comme nombre à nombre. Et de-là il s'enſuit que c'eſt auſſi la même choſe de dire que deux grandeurs ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre, & de dire qu'elles ſont incommenſurables, puiſque ſi elles étoient commenſurables elles ſeroient comme nombre à nombre.

SECTION PREMIERE.

Des Grandeurs commenſurables ou des Raiſons de nombre à nombre.

Tout ce qui a été dit dans les deux Livres precedens des Raiſons en general, peut-être appliqué ſans peine aux Raiſons de nombre à nombre. Ce n'eſt donc pas ce que l'on va faire ici : ce ſeroit une repetition inutile. Mais on parlera ſeulement de ce qui convient ſpecifiquement aux Raiſons de nombre à nombre, & en quoi elles ſont differentes des Raiſons Sourdes. III.

I. Lemme.

Marquer les nombres par lettres.

On peut marquer les nombres par lettres comme les autres grandeurs : & alors il faut obſerver en faiſant les quatre operations ſur les nombres que l'on a marquez par lettres, tout ce qui a été dit dans le I. Livre de ces operations ſur les grandeurs quelconques : D'où naiſſent pluſieurs differences entre cette maniere de marquer les nombres IV.

par

par lettres, & celle de les marquer par chiffres.

1. Une seule lettre peut marquer quand on veut quelque grand nombre que ce soit; au lieu qu'il faut beaucoup de caracteres pour marquer les grands nombres.

2. Les chiffres changent dans l'Addition, Soustraction, & Multiplication des nombres; mais les lettres ne changent point: Car si *b* signifie 4, & *a* 5: pour les adjoûter en chiffres je mettray 9, & par lettres je mettray $b + a$. Et pour les multiplier en chiffres je mettray 20, & par lettres je mettray $b\,a$: & c'est en cela qu'est le plus grand avantage des lettres; car les multiplications s'y font sans peine, & laissent toûjours voir les nombres par lesquels on a multiplié; au lieu que deux grands nombres sont difficiles à multiplier par chiffres, & on ne voit plus dans le produit les nombres dont il a été fait.

3. Le rang dans les chiffres fait tout; car 29 & 92 sont deux nombres bien differens: mais il ne fait rien dans les lettres quand on les joint ensemble, ce qui marque une multiplication; car il n'importe par où on commence la multiplication de deux nombres. C'est toûjours la même chose 5 fois 4, ou 4 fois 5: & ainsi *bcd*, *bdc*, *dbc* marquent le même nombre.

4. Les chiffres signifient des nombres determinez: & un même caractere dans la même place des unitez, des dixaines, &c. ne peut signifier que la même chose. Mais les lettres signifient des nombres quelconques; en observant neanmoins que dans une même operation la même lettre doit signifier le même nombre.

II. LEM-

II. Lemme.

Cette maniere de marquer les nombres par lettres, fait voir que les nombres peuvent étre considerez comme étant d'une dimension, ou de deux, ou de trois, ou de quatre, &c. V.

On considere un nombre comme étant d'une seule dimension, lors qu'on regarde simplement ce qu'il contient d'unitez & qu'on le marque par une seule lettre, soit qu'il ait besoin pour étre écrit en chiffre d'un seul ou de plusieurs caracteres. Ainsi 72 marqué par un *s*, est un nombre d'une seule dimension.

On le considere comme ayant deux dimensions, lors qu'il est exprimé par deux lettres qui marquent deux nombres, qui se multipliant l'un l'autre font le nombre total qu'on veut exprimer; Ainsi *b* signifiant 2, & *p* 36: *bp* signifie deux fois 36, ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 3 dimensions, lors qu'il est exprimé par 3 lettres, qui marquent 3 nombres, dont le 3.e multiplie le produit des deux premiers. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3 & *m* 12: *bcm* signifie 2 fois 3 fois 12. c'est à dire, 6 fois 12; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 4. dimensions, lors qu'il est exprimé par 4 lettres qui marquent 4 nombres, dont le 3.e ayant multiplié le produit des deux premiers, le 4.e multiplie le produit des 3 autres. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3, & *d* 4; *bcdc* signifie 2 fois 3 fois 4 fois 3; c'est à dire, 6 fois 4 fois 3 ou 24 fois 3; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant cinq dimensions, lors qu'il est exprimé par 5 lettres.

De 6, quand par 6.

De 7, quand par 7.

De 8, quand par 8, &c.

III. Lem-

III. Lemme.

VI. On voit assez que deux mêmes lettres, comme *b b* ou *c c*, doivent faire un nombre quarré ; & 3 mêmes lettres, comme *b b b*, un nombre cubique.

Mais il y a encore une autre observation à faire sur ces nombres. C'est qu'un nombre est reconnu pour quarré non seulement quand il est exprimé par deux mêmes lettres comme *b b*, mais aussi quand on partage en deux parts égales les lettres d'un nombre, en sorte que les mêmes lettres se trouvent en l'une & en l'autre partie. Ainsi *bbcc*, ou *bbccdd*, sont des nombres quarrez, parce que l'un se peut partager en *b c* & *b c*, & l'autre en *b c d* & *b c d*. Car on a déja veu qu'il n'importoit de rien en quelque maniere que les lettres fussent rangées.

Un nombre de même est cubique non seulement quand il est exprimé par les trois mêmes lettres comme *bbb*, mais aussi quand les lettres qui le marquent peuvent être divisées en trois parts égales dont chacune contienne les mêmes lettres. Ainsi *bbbccc*, ou *bbbcccddd* sont deux nombres cubiques, parce que le premier se peut partager en *b c*, *b c* & *b c*, & l'autre en *bcd*, *bcd* & *b c d*.

Corollaire.

VII. Il s'ensuit delà sans autre preuve, que le produit de deux nombres quarrez est toûjours un nombre quarré qui a pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres quarrez. Ainsi *b b* en *c c* fait *b b c c*, qui a pour sa racine *b c*. Et que le produit de deux nombres cubiques est toû-

jours

jours un nombre cubique, qui a aussi pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres cubiques.

IV. Lemme.

Les exposans d'une raison de nombre à nombre sont necessairement ou deux nombres impairs, ou un nombre pair & un impair, mais ce ne peut être deux pairs; car deux pairs pouvant encore l'un & l'autre être partagez par la moitié: cette raison n'auroit pas été reduite aux moindres termes qu'elle l'auroit pû être, & cette division par la moitié fera enfin que ces deux pairs se reduiront ou à deux impairs comme la raison de 10 à 6 se reduit à la raison de 5 à 3, ou au moins à un pair & à un impair, comme la raison de 8 à 14 se reduit à la raison de 4 à 7. VIII.

V. Lemme.

Quoy que deux nombres n'ayent pas autant de dimensions l'un que l'autre, ils ne laissent pas de pouvoir être comparez ensemble, parce que tous les nombres étant mesurez par l'unité ont toûjours raison l'un à l'autre. IX.

Neanmoins il est souvent utile de pouvoir faire que le nombre qui auroit moins de dimensions que l'autre, en ait autant demeurant le même, & cela est aisé.

Car reservant la lettre (*i*) pour marquer l'unité il ne faut qu'augmenter les lettres du nombre qui en a moins que l'autre, d'autant d'*i* qu'il est necessaire pour faire qu'il y ait autant de lettres à l'un qu'à l'autre. Ainsi ayant à comparer *b* avec *bx*; ajoûtant un *i* à *b*, *b i* aura autant de dimensions que *b x*.

Et

Et neanmoins *b i* sera le même nombre que *b*, parce que l'unité multipliant un nombre ne le change point ; 4 fois un, ou une fois 4, étant la même chose que quatre.

Et quand on le multiplieroit 2, 3 & 4 fois par l'unité, ce seroit toûjours de même : comme il se voit en ce que l'unité prise une fois (ce qui peut étre marqué par un seul *i*) est un nombre lineaire ; & multiplié par soi-même, ce qui peut étre marqué par deux (*i i*) est un nombre quarré, quoi que ce soit toûjours un : & marquée par trois (*iii*) un nombre cubique : & par quatre (*iiii*) un nombre quarré de quarré : & ainsi à l'infini. D'ou il s'ensuit que comme un seul (*i*) n'apporte aucun changement au nombre auquel il est ajoûté : deux, trois, quatre *i*, n'en apportent point aussi.

Cette observation sera de grand usage dans les Theorémes suivans.

VI. Lemme.

X. Il est bon pour distinguer plus facilement les nombres pairs des impairs de marquer les nombres pairs par des consones, & les impairs des par voyelles, reservant toûjours *i* pour l'unité : neantmoins quand on ne considere ni les pairs ni les impairs, les consonnes alors se prendront pour les nombres en general.

VII. Lemme.

XI. Outre cette maniere de marquer par lettres les nombres que l'on veut multiplier, on peut aussi en les marquant par les chiffres ordinaires avoir presque les mêmes avantages, qui sont, 1. Que les nombres multiplians & multipliez paroissent toûjours. 2. Qu'on voit tout d'un coup de combien de dimensions est chaque nombre. 3. Que l'on

l'on voit sans peine les exposans de chaque raison de nombre à nombre.

Il ne faut pour cela que faire deux choses. La 1re est de mettre une virgule entre deux, ou trois, ou quatre, ou cinq nombres que l'on veut multiplier les uns par les autres, en se souvenant que cette virgule veut dire *fois*.

Ainsi 4, 5. voudra dire 4 fois 5. c'est à dire 20.

5, 12. 5 fois 12. c'est à dire 60.

5, 6, 7, 8. 5 fois 6 fois 7 fois huit, c. 30 fois 7 qui font 210, & 8 fois 210, ce qui fait 1680.

Les quarrez se mettront de même.

3, 3. Quarré de 3. 9.

4, 4. Quarré de 4. 16.

12, 12. Quarré de 12. 144.

36, 36. Quarré de 36. 1296.

Les Cubes de même.

4, 4, 4. Le Cube de 4. 64.

10, 10, 10. Le Cube de 10. 1000.

On peut aussi dans cette maniere faire les nombres d'autant de dimensions les uns que les autres, en multipliant par 1, c'est à dire par l'unité, ceux qui n'en ont pas tant, & mettant la virgule entre-deux. Ainsi si je veux comparer 4 à 4, 7. Je n'auray qu'à mettre 4, 1 & 4, 7. Ce qui signifiera 4 fois 1, & 4 fois 7. Ce qui peut étre de grand usage dans les proportions.

L'autre invention qui n'est que pour les nombres quarrez, cubiques, quarrez de quarrez, &c. c'est de faire comme aux lettres, mettre au dessus un peu à côté un petit 2 pour les quarrez; un 3 pour les cubes; un 4 pour les quarrez de quarrez, &c.

Ainsi $8.^2$ marquera le quarré de 8. 64.

8^3. Le cube de 8. 512.

8^4. Le quarré de quarré de 8. 4096.

DEFINITIONS.

XII. Il y a quelques definitions qu'il faut sçavoir pour bien comprendre les raisons de nombre à nombre.

Un nombre est dit en diviser un autre, ou en être la mesure quand il y est précisement tant de fois.

Ainsi l'unité est la mesure de tous les nombres, & tous les nombres sont multiples de l'unité.

Le nombre 2 est la mesure de tous les nombres pairs, & tous les nombres pairs sont multiples de 2.

Mais il faut remarquer 1°. que chaque nombre est la mesure de soy-même, parce qu'il est une fois dans soy-même. Et ainsi tout nombre a au moins deux mesures, soy-même & l'unité; il n'y a que l'unité qui n'a que soy-même. 2°. Que toutes mesures sont doubles, si ce n'est dans les quarrez, où un nombre se multiplie soy-méme; Car si 3 par exemple est le quart de 12, quatre en sera le tiers. Si 3 est la 12.me de 60, 12 en sera la 5.me

3°. On dit qu'un nombre est nombre premier, quand il n'a de mesure que l'unité & soy-même, (ce qui se sous-entend sans qu'on le dise.) Comme 2. 3. 5. 7. 11. 13, &c.

Hors le nombre 2 nul nombre pair ne peut étre premier, parce que tous (hors 2) peuvent au moins étre divisez par 2.

4°. Deux nombres sont premiers entr'eux, quand ils n'ont de mesure commune que l'unité.

Ils s'ensuit delà que deux nombres differens qui sont chacun premiers le sont entr'eux, comme 5. 7. 11. J'ay dit deux nombres differens; car deux mémes nombres comme 5 & 5, quoi que chacun soit premier, ne le sont point entr'eux; Car ou-

tre.

tre l'unité, étant chacun à soy-même sa mesure, ils ont encore cette mesure commune.

Deux nombres qui se suivent sont premiers entr'eux.

Deux impairs qui se suivent comme 7 & 9 le sont aussi.

Tous les quarrez sont premiers entr'eux, lors que leurs racines sont des nombres premiers, ou seulement premiers entr'eux, quoi que nul quarré ne puisse être nombre premier 9. 25. 49. 64. 81.

Deux nombres premiers entr'eux ne sçauroient tous deux être pairs; il faut qu'au moins l'un des deux soit impair; car deux pairs auroient le nombre 2 pour mesure commune.

La Notion des Raisons de nombre à nombre.

La raison de nombre à nombre est bien plus facile à concevoir que la raison des grandeurs en general, à cause que les nombres ont toûjours l'unité pour commune mesure, & qu'il y a des grandeurs qui n'ont aucune mesure commune. XIII.

Ainsi la raison de deux nombres ne consiste qu'en ce que l'un est tant de fois dans l'autre, si l'un est multiple de l'autre, comme 4 est 3 fois dans 12; ou que quelque aliquote de l'un est précisement tant de fois dans l'autre; ce qui est toûjours certain au moins de l'unité, comme 2 qui est le tiers de 6, est quatre fois dans 8; l'unité qui est le quart de quatre, est 7 fois dans 7.

Or delà il est aisé de comprendre qu'afin que la raison de deux nombres soit égale à la raison de deux autres, il faut que si le second est multiple du premier, le troisiéme soit autant de fois dans le quatriéme que le premier est dans le second; ou que si le premier n'a que quelqu'une de ses aliquotes qui soit tant de fois dans le second, une al-

quote pareille du troisiéme soit autant de fois dans le quatriéme; c'est à dire que si le tiers du premier est cinq fois dans le second: il faut aussi que le tiers du troisiéme soit cinq fois dans le quatriéme: Quatre est 5 fois dans 20, comme 7 est 5 fois dans 35.

La moitié de 6 est 5 fois dans 15, comme la moitié de 8 est 5 fois dans 20.

Division Generale.

XIV. La plus generale division des raisons de nombre à nombre, est de dire que les unes sont premieres, & les autres non-premieres.

J'appelle premieres celles dont les termes sont premiers entr'eux, comme la raison de l'unité à tout nombre: la raison de 2 à tout nombre impair.

J'appelle non-premieres celles dont les termes ne sont pas des nombres premiers entr'eux, comme 8, 12; 15, 20; 45, 81.

Propositions Fondamentales.

XV. Deux raisons premieres étant differentes ne sçauroient être égales.

Chaque raison premiere peut être égale à une infinité de non premieres.

Chaque raison non-premiere peut être reduite à une premiere qui lui sera égale.

Il faut prouver toutes ces trois propositions.

La premiere se prouve ainsi. Deux nombres premiers entr'eux n'ont de mesure commune que l'unité qui est l'aliquote qui prend sa denomination du nombre même, comme l'unité est une seiziéme de 16. Si je compare donc 16 à 25 qui sont deux nombres premiers entr'eux (quoi que nul ne soit premier:) la raison de 16 à 25 ne consiste qu'en ce qu'une 16.me de 16 est 25 fois dans 25. Or dans l'in-

l'infinité des nombres, il n'y a que 16 & ses multiples, comme 2 fois 16, 3 fois 16, qui ait des seiziémes, & il n'y a aussi que 25 & ses multiples, comme 2, 25. 3, 25. en qui quelque nombre puisse être précisement 25 fois. Or deux nombres dont l'un seroit multiple de 16, & l'autre autant multiple de 25, ne seroient pas des nombres premiers entr'eux. Donc il est impossible que deux raisons premieres étant differentes soient égales.

Preuve de la deuxiéme Proposition.

Elle est claire par ce qui vient d'être dit; car deux nombres premiers entr'eux peuvent être chacun multipliés par un même nombre, & cela une infinité de fois : n'y ayant point de nombre qui ne puisse multiplier l'un & l'autre. Et alors (par II. 58) cette raison non-premiere sera égale à la premiere. XVI.

Preuve de la troisiéme Proposition.

Une raison non-premiere est celle qui est entre deux nombres non-premiers entr'eux. Or afin que deux nombres soient non-premiers entr'eux, il faut qu'ils ayent une commune mesure autre que l'unité, & que par consequent ils soient multiples d'un même nombre. Ils ont donc chacun deux dimensions, & en ont une commune. Ils peuvent donc être exprimés chacun par deux lettres, dont il y en aura une qui sera la même, ou par deux chiffres avec une virgule entre-deux, & il y aura de part & d'autre le même chiffre. Donc effaçant ou la même lettre, ou le même chiffre, ce qui restera sera en même raison par II. 58. & 59. XVII.

8. 12. } .. *b. a.*
bd. ad } .. 2. 3.
2,4.3,4.

Mais il faut remarquer 2 choses : La premiere, que quand l'un des nombres est multiple de l'autre, c'est le nombre même dont l'autre est multiple, qui est la mesure commune des deux nombres : de sorte qu'il faut ou l'exprimer ou le concevoir comme étant multiplié par l'unité : 4 à 20, c'est à dire 4, 1. à 4, 5. De sorte qu'effaçant 4 de part & d'autre, la reduction sera 1. 5.

La deuxiéme, que toute raison d'un même nombre à soy-même se reduit à la raison de l'unité à l'unité ; car ils ont chacun deux mesures comme il à esté dit, l'unité & soy-même, & chacune leur est commune, effaçant donc la plus grande de ces mesures qui sont toutes deux communes, reste l'unité de part & d'autre.

Si la premiere reduction ne donnoit pas des nombres premiers entr'eux, (ce qui arrive quand on ne prend pas le plus grand diviseur commun,) il ne faudroit que recommencer, & il est indubitable que cela se reduiroit à la fin à une raison premiere, c'est à dire à une raison de deux nombres premiers entr'eux.

Corollaire.

XVIII. Les deux termes de la raison premiére à laquelle se reduit une raison non premiere s'appellent *les exposans* de cette raison non-premiére.

Ainsi 2 & 3 sont les *exposans* de la raison de 8 à 12. 4 & 5, Les *exposans* de la raison de 28 à 35.

Cela s'appelle autrement reduire une raison aux moindres termes qu'elle peut être. Et pour abreger, le mot de *reduire* signifiera tout cela. Ce qu'il faut bien remarquer.

Ceci

Ceci revient encore à cette maxime : Si un même nombre en divise deux autres, les quotiens sont proportionnels à ces deux nombres ; car le même nombre 4 ayant divisé 8 & 12, les quotiens ont été 2 & 3, qui sont en même raison que 8 & 12.

I. Theoréme.

Deux raisons égales ont necessairement les mêmes exposans, & ce n'est qu'en cela qu'elles sont égales. XIX.

Car il faut que deux raisons que l'on compare, ou soient toutes deux premieres, ou toutes deux non-premieres, ou que l'une soit premiere, & l'autre non-premiere.

Or il vient d'être prouvé qu'elles ne sçauroient être égales étant toutes deux premieres si elles sont differentes : & que les non-premieres se peuvent reduire à une premiere. Il faut donc que les non-premieres pour être égales se puissent reduire à une seule & même premiere : ou s'il n'y en a qu'une de non-premiere, qu'elle se puisse reduire à la même premiere que celle qui l'est déja. Or c'est ce qu'on appelle avoir les mêmes *exposans*, que de ne pouvoir être reduite qu'à une même & seule raison premiere. Donc il est impossible que deux raisons égales n'ayent pas les mêmes *exposans.*

II. Theoréme.

Deux raisons de nombre à nombre étant égales, le produit des antecedens est au produit des consequens comme deux nombres quarrez : ou, la raison du produit des antecedens au produit des consequens a pour ses exposans des nombres quarrez. Car deux raisons ne sçauroient être égales, qu'elles n'ayent les mêmes exposans par le Theoréme precedent, c'est à dire qu'étant reduites, el- XX.

les ne le soient à deux raisons premieres qui ont chacune le même antecedent & le même consequent. Donc le produit des antecedens sera la multiplication d'un nombre par soy-même, ce qui fait un nombre quarré, & de même du produit des consequens.

Deux raisons égales $bx. \ cx :: by. \ cy.$
reduites aux moindres termes $b. \ c :: b. \ c.$
Donc le produit des antecedens est $bb.$
& celui des consequens $cc.$

Exemple par les chiffres selon le septiéme Lemme.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3.
Exp. 4. 5 :: 4. 5.

Donc le produit des antecedens est 4 fois 4, c'est à dire le quarré de quatre.

Et le produit des consequens est 5 fois 5, c'est à dire le quarré de cinq.

III. Theoréme.

XXI. Trois raisons de nombre à nombre étant égales, la raison du produit des 3 antecedens au produit des 3 consequens a pour ses exposans des nombres cubiques.

C'est la même chose; car trois raisons ne sçauroient être égales, qu'elles n'aient toutes trois les mêmes exposans, c'est à dire qu'étant reduites elles ne le soient à trois raisons, qui ne seront que la même, ayant toutes trois le même antecedent & le même consequent. Donc le produit des antecedens sera un cube, & le produit des consequens un autre cube.

$bx. \ cx :: by. \ cy :: bz. \ cz.$
$b. \ c :: b. \ c :: b. \ c.$

Donc le produit { des antecedens $bbb.$ / des consequens $ccc.$ }

C'est la même chose par les chiffres.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3 :: 4, 9. 5, 9.
4. 5 :: 4. 5 :: 4. 5.

Donc

Donc le produit des antecedens est 4, 4, 4, c'est à dire le cube de 4. Et le produit des consequens est 5, 5, 5, c'est à dire le cube de 5.

IV. THEORÉME.

LA raison doublée ou triplée d'une raison de nombre à nombre a pour ses exposans des nombres quarrez si elle est doublée, & des nombres cubiques si elle est triplée. XXXI.

Car une raison doublée n'est autre chose qu'une raison composée de deux raisons égales.

Or une raison composée de deux raisons n'est autre chose que la raison du produit des antecedens de ces deux raisons au produit des consequens par III. 19.

Donc une raison composée de deux raisons égales de nombre à nombre (ce qui est la même chose que la raison doublée d'une raison de nombre à nombre) n'est autre chose que la raison du produit des antecedens de 2 raisons égales de nombre à nombre au produit des consequens.

Or cette raison du produit des antecedens de deux raisons égales de nombre à nombre au produit des consequens, a pour ses exposans des nombres quarrez par le 2.d Theoréme.

Donc toute raison doublée d'une raison de nombre à nombre a pour ses exposans des nombres quarrez.

On prouvera de la même sorte par le 3.e Theoreme que la raison triplée d'une raison de nombre à nombre a pour ses exposans des nombres cubiques; parce qu'une raison triplée n'est autre chose qu'une raison composée de trois raisons égales. Donc, &c.

I. COROLLAIRE.

TROIS nombres étant continuëment propor- XXXII.

 tionnels,

tionnels, ne peuvent être reduits aux moindres nombres qu'ils peuvent être, que les deux extrémes ne soient des nombres quarrez, & celui du milieu le produit de leurs racines.

Car le 1.er de ces 3 nombres est au troisiéme en raison doublée de la raison du 1.er au 2.d ou [ce qui est la même chose] en raison composée de la raison du 1.er au 2.d & de celle du 2.d au 3e. comme il a été prouvé III. 18. Donc par le 4e. Theoréme la raison du 1.er au 3.e. doit avoir pour ses exposans des nombres quarrez. Or par III. 33. le produit des 2 racines est moyen proportionnel entre deux quarrez, & il est clair que deux nombres ne peuvent avoir qu'un seul nombre pour moyen proportionnel. Donc le produit des deux racines doit être ce second terme.

II. Corollaire.

XXIV. Quatre grandeurs étant continuëment proportionnelles la raison de la 1.re à la 4.e a pour ses exposans des nombres cubiques.

C'est la même chose; car (par III. 24.) la raison de la 1.re à la 4.e est une raison triplée. Or par le Theoréme precedent, toute raison triplée a pour ses exposans des nombres cubiques.

V. Theoréme.

XXV. Si plusieurs nombres sont continuëment proportionnels (ce qui s'appelle Progression Geometrique:) il faut necessairement qu'étant *reduits*, ils soient ou tous impairs, ou tous pairs hors l'un des extrémes, qui sera seul necessairement impair. Car il est clair qu'ils ne peuvent pas être tous pairs, parce qu'ils ne seroient pas *reduits*.

Demonstr. Ce qui fait que les nombres sont proportionnels, c'est qu'il y a toûjours une même raison entre ceux qui se suivent immediatement. Et ainsi toutes ces raisons étant égales n'ont que les mê-

mêmes expoſans, qui ſont, ou l'unité & quelque autre nombre que ce ſoit, quand la Progreſſion eſt multiple, ou deux autres nombres quand elle n'eſt pas multiple, leſquels deux nombres ſont neceſſairement ou tous deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair, par le 4.e Lemme.

PREUVE DU PREMIER CAS.

DANS le premier cas, c'eſt à dire quand l'un des expoſants eſt l'unité, la verité du Theoréme eſt manifeſte; car le 2.d expoſant ſera le 2.d terme de la Progreſſion, & tous les autres en ſont les puiſſances, le 3.e le quarré, le 4.e le cube, le 5.e le quarré de quarré, &c. D'où il s'enſuit que ſi ce 2.d expoſant eſt un nombre impair, (toutes les puiſſances d'un nombre impair l'étant toûjours auſſi,) tous les termes de la Progreſſion ſont impairs. XXVI.

Exemple quand le deuxiéme terme eſt 5; (Il faut ſe ſouvenir que par $5.^2$ 5^3, &c. j'entens toûjours le quarré de 5. le cube de 5, &c.)

÷ 1. 5. 5^2. 5^3. 5^4, &c.
÷ 1. 5. 25. 125. 625, &c.

Que ſi le 2.d expoſant eſt pair, comme il ſera le 2.e terme de la Progreſſion, & que tous les autres termes ſeront ſes puiſſances: ils ſeront tous pairs (toute puiſſance d'un nombre pair l'étant toûjours auſſi.) Il n'y aura donc que l'unité qui ſera un nombre impair dans cette Progreſſion.

Exemple, ce ſecond expoſant étant 10.

÷ 1. 10. 10^2. 10^3. 10^4, &c.
÷ 1. 10. 100. 1000. 10000.

PREUVE DU DEUXIÉME CAS.

QUAND la Progreſſion n'eſt pas multiple, c'eſt à dire quand l'un des deux expoſans n'eſt pas l'unité, il faut toûjours qu'ils ſoient ou tous deux XXVII.

impairs, ou l'un pair & l'autre impair, comme il a déja été dit. Or ce sont alors les deux exposans qui determinent tous les autres termes.

Car les deux extrémes doivent être la même puissance de chacun des deux exposans; c'est à dire le quarré s'il n'y a que trois termes, le cube s'il y en a 4. le qq. s'il y en a 5. le qc. s'il y en a 6, & ainsi jusques à l'infiny. Et tous les autres termes doivent avoir autant de dimensions que ces extrémes; c'est à dire en avoir 2 si ces extrémes sont des quarrez. 3, si ce sont des cubes. 4, si ce sont des qq. 5 si ce sont des qc, &c. Mais il faut qu'une partie de leurs dimensions soit d'un exposant, & l'autre partie de l'autre exposant.

Or de là s'ensuit tout ce qu'on avoit à prouver dans ce Theoréme; car 1. Quand les deux exposans sont impairs, toutes les multiplications qui font les extrémes & ceux d'entre-deux se font par impairs, & par consequent ils doivent tous être impairs.

Exemples, les deux exposans étant 3. & 5. (Il faut se souvenir qu'une virgule entre deux chiffres, signifie qu'ils se doivent multiplier l'un l'autre.)

∺ $3^2.\ 3,5.\ 5^2.$	9. 15. 25.
∺ $3^3.\ 3^2,5.\ 3,5^2.\ 5^3.$	27. 45. 75. 125.
∺ $3^4.\ 3^3,5.\ 3^2,5^2.\ 3,5^3.\ 54.$	81. 135. 225. 375. 625.

2. Quand l'un des exposans est pair & l'autre impair, l'un des extrémes sera pair & l'autre impair. Mais tous ceux d'entre deux seront pairs, par ce qu'il y aura quelqu'une de leurs dimensions qui sera un nombre pair. Or toute multiplication où il entre un nombre pair, fait un nombre pair.

Exemples les deux exposans étant 2 & 5.

∺ $22.\ 2,5.\ 5.^2$	4. 10. 25.
∺ $2^3.\ 2^2,5.\ 2,5^2.\ 5^3.$	8. 20. 50. 125.
∺ $2^4.\ 2^3,5.\ 2^2,5^2.\ 2,5^3.\ 5^4.$	16. 40. 100. 250. 625.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Ces deux cas de la Progression multiple & de la non multiple ne sont differens qu'en apparence. Le 1.er se devant concevoir comme étant virtuellement semblable au second; Car l'unité qui en est le premier terme doit être conceuë comme quarré quand il y a trois termes, comme cube quand il y en a 4, comme quarré de quarré quand il y en a 5, & ainsi de suite. Et tous les autres termes doivent être conceus comme ayant autant de dimensions qu'en a le dernier terme de la Progression: ce qui se fait par le moyen des unitez que l'on met pour autant de dimensions qui leur manquent. Cela se comprendra mieux par des exemples Soit i pris pour l'unité, & x pour l'autre exposant quelconque pair ou impair. Voici comme ces Progressions multiples doivent être conceuës, pour être semblables aux non multiples. XXVIII.

∸ ii. ix. xx.
∸ iii. iix ixx. xxx.
∸ iiii. iiix. iixx. ixxx. xxxx.

SECTION SECONDE.

Des Grandeurs incommensurables ou des Raisons Sourdes.

NOUS avons déja dit, que ce qui fait que des Grandeurs sont appellées incommensurables (ce qui est la même chose que n'avoir entr'elle qu'une raison sourde,) est qu'ayant chacune une infinité de mesures de plus petites en plus petites, nulle des mesures de l'une ne peut-être la mesure de l'autre. XXIX.

Cela paroît incomprehensible, & l'est en effet, parce que ce qui est cause de cela, ne peut être que

la divisibilité de la matiere à l'infini. Or il est clair que tout ce qui tient de l'infinité, ne sçauroit être compris par un esprit fini tel qu'est celui de tous les hommes.

Il ne faut donc pas s'imaginer que l'on puisse avoir des notions aussi claires des raisons sourdes, qu'on en a des raisons de nombre à nombre : ni qu'on puisse prouver positivement que deux grandeurs sont incommensurables ; on ne le peut certainement, & tout ce que l'on sçauroit faire de mieux, est de le faire negativement ; c'est à dire en montrant qu'elles ne sont point entr'elles comme nombre à nombre : par où on est tres-convaincu que la chose est, quoi qu'on ne penetre pas comment cela peut être. Tout se reduit donc à faire voir par les proprietez essentielles des raisons de nombre à nombre que nous venons d'établir, quelles peuvent être les grandeurs qui ne sont point entr'elles comme nombre à nombre, & qui par consequent sont incommensurables, parce que les proprietez des raisons de nombre à nombre ne pourroient convenir à la raison qu'elles auroient entr'elles. C'est pourquoi il faut bien avoir dans l'esprit les definitions suivantes.

DEFINITIONS.

XXX. 1. Deux grandeurs sont incommensurables, quand elles ne sont point entr'elles comme nombre à nombre, ou que la raison qu'elles ont entr'elles n'est point une raison de nombre à nombre.

2. Une raison est sourde quand on peut prouver qu'elle n'a point ce qui convient necessairement aux raisons de nombre à nombre.

3. Chacune des deux raisons égales dont est composée la raison qu'on appelle *doublée*, ou des trois égales dont est composée la raison qu'on appelle *triplée*, soit appellée la raison simple d'une raison doublée ou triplée.

4. Deux

4. Deux grandeurs peuvent être incommensurables, que leurs quarrez & leurs cubes ne le sont pas. Et on dit alors, qu'elles sont incommensurables en elles-mêmes, ou en longueur, ou lineairement, mais qu'elles sont commensurables en puissance. Et il faut remarquer que le quarré est la puissance qui s'appelle simplement puissance, le cube la 2.de, le quarré de quarré la 3.e, & ainsi à l'infiny. Et que neanmoins quand on les marque par un petit chiffre au dessus & un peu à côté d'une lettre, ou d'un plus grand chiffre, 2 signifie le quarré, 3 le cube, 4 le quarré de quarré, comme $6.^2$ $6.^3$ $6.^4$ &c. $8.^2$ $8.^3$ $8.^4$ &c.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

DES INCOMMENSURABLES.

DEUX grandeurs sont incommensurables (quoi que non en puissance, ou 1.ere ou 2.de) quand la Raison qu'elles ont entr'elles est la raison simple, ou d'une raison doublée, qui a pour ses exposans d'autres nombres que deux nombres quarrez, ou d'une raison triplée qui a pour ses exposans d'autres nombres que deux cubiques. XXXI.

C'est une suite necessaire de ce qui a été prouvé ci-dessus, qu'une raison composée de deux raisons égales de nombre à nombre doit avoir necessairement pour ses exposans des nombres quarrez; c'est à dire que les deux termes de cette raison doublée doivent être necessairement deux nombres quarrez, comme 1 & 4. 4 & 9. 16 & 25. Et qu'il ne suffit pas que l'un d'eux soit quarré, mais qu'ils le doivent être tous-deux.

Donc toute raison qui a pour ses exposans d'autres nombres que deux nombres quarrez ne sçauroit être composée de deux raisons égales de nombre à nombre : Elle ne le peut donc être que de deux raisons sourdes. Donc les deux grandeurs

entre

entre lesquelles est cette raison qui ne sçauroit être de nombre à nombre, sont incommensurables par la 1.re definition S. 30. & par 2. S.

Il n'y a rien de plus facile que d'appliquer tout cela à la raison simple d'une raison triplée, &c

Mais on voit bien aussi que ces grandeurs sont commensurables en puissance ou 1.ere ou 2.de car c'est ce que l'on suppose, que leurs quarrez ou leurs cubes sont comme nombre à nombre, mais non comme deux nombres ou quarrez ou cubiques.

I. Corollaire.

XXXII. Deux quarrez qui sont entr'eux comme deux nombres, & non comme deux nombres quarrez, ont leurs racines incommensurables.

Et deux Cubes de même ont leurs racines incommensurables, si ces Cubes sont entr'eux comme deux nombres qui ne sont pas tous deux cubiques.

C'est la proposition même; car par III. 36. deux quarrez sont entr'eux en raison doublée de leurs racines, & deux cubes en raison triplée: Donc si les quarrez sont entr'eux comme 2 à 1. ou comme 4 à 3: la raison des racines sera la raison simple d'une raison doublée, qui n'aura pas pour ses exposans deux nombres quarrez. Donc ce sera une raison sourde. Donc ces deux racines seront incommensurables: Et on voit assez qu'il en sera de même des racines des cubes.

II. Corollaire.

XXXIII. Quand trois grandeurs sont continuëment proportionnelles: Si la 1.re est à la derniere comme deux nombres qui ne soient pas tous deux quarrez, comme si la 1.re est à la derniere comme 2 à 1, ou comme 3 à 2: la seconde sera incommensurable

ble à la premiere & à la derniere, c'est à dire que la raison de la 1.ere à la seconde sera une raison sourde, aussi bien que celle qui lui est égale de la 2.de à la 3.e Mais cette 2.de sera commensurable en puissance à chacune des deux autres ; car (par III. 19.) la raison de la 1.re à la 3.e est composée des 2 raisons égales de la 1.re à la 2.de & de la 2.de à la 3.e Donc si ces deux raisons étoient de nombre à nombre, la raison de la 1.re à la 3.e qui en est composée, auroit eu pour ses exposans deux nombres quarrez. Or elles ne les a pas par l'hypothese. Elles sont donc sourdes : & par consequent la 2.de de ces 3 grandeurs est incommensurable tant à la 1.ere qu'à la 3.e

Mais elle leur est commensurable en puissance; car (par III. 34.) le quarré de la 1.ere est au quarré de la 2.de, comme la 1.ere à la 3.eme & le quarré de la 2.de au quarré de la 3.e est de même comme la 1.re à la 3.e

III. Corollaire.

Lors que 4 grandeurs sont continuëment proportionnelles, si la 1.re est à la 4.e comme deux nombres qui ne soient pas tous deux cubiques: Chaque grandeur est incommensurable à celle qui la suit, en longueur & en 1.ere puissance, & seulement commensurable en 2.de puissance. XXXIV.

C'est la même demonstration que la precedente; Car d'une part (par III. 19.) la raison de la 1.re à la 4.e doit être composée des 3 raisons égales de la 1.re à la 2.de, de la 2.de à la 3.e & de la 3.e à la 4.e Donc c'est une raison triplée, qui par l'hypothese a d'autres nombres pour ses exposans que des nombres cubiques. Donc par la proposition, chacune de ces raisons est sourde. Donc les grandeurs qui ont entr'elles cette raison sourde sont incommensurables.

D'autre

D'autre part (par III. 35.) les cubes de deux de ces grandeurs qui se suivent sont en même raison que la 1.re à la 4.e Or par l'hypothese, la raison de la 1.re à la 4.e est une raison de nombre à nombre (quoi que ce ne soit pas celle qui est entre deux nombres cubiques.) Donc ces grandeurs qui se suivent sont commensurables en 2.de puissance.

IV. COROLLAIRE.

XXXV. SI 3 grandeurs sont telles, que d'une part le quarré de la plus grande soit égal aux quarrez des deux autres, & que de l'autre la plus petite des trois soit une aliquote de la plus grande, c'est à dire qu'elle soit à la plus grande comme l'unité à quelque nombre: celle qui est entre-deux sera incommensurable à l'une & à l'autre, & elle leur sera seulement commensurable en puissance.

Soient les trois grandeurs *b. d. i.* Et que *b* soit à *i* comme 3 à 1. Leurs quarrez seront comme 9. à 1. Donc par l'hypothese du plus grand quarré égal aux deux autres:

bb. dd. :: 9. 8.

Et *dd. ii.* :: 8. 1.

Donc par le 1.er Corollaire, *b* & *d* sont incommensurables, & *d.* & 1. le sont aussi. Mais on voit assez que *d.* est commensurable en puissance à l'une & à l'autre.

V. COROLLAIRE.

XXXVI. SI trois Grandeurs sont d'une part continuëment proportionnelles, & que de l'autre la plus grande soit égale aux deux autres: elles sont absolument incommensurables entr'elles.

Car si elles étoient comme trois nombres, il faudroit par le 4.e Lemme, & le 5.e Theoréme qu'elles fussent ou comme trois impairs, ou comme un impair & deux pairs, ou comme deux pairs & un

un impair; c'est à dire en l'une de ces 3 manieres, en marquant les impairs par des voyelles, & les pairs par des consonnes, & en commançant par la plus grande, *a. e. o.*
a. b. c.
b. c. e.

Or la 2.de hypothese fait que tous ces 3 cas sont impossibles; car cette 2.de hypothese est que la 1.re doit être égale aux 2 dernieres, ce qui ne peut être dans aucun des trois cas: la 1.re dans les deux premiers cas étant un impair, & les deux dernieres un pair; & dans le 3.e cas étant un pair, & les deux dernieres faisant un impair.

Avertissement important.

De tout ce qui vient d'être dit dans la 1.re section des raisons de nombre à nombre, & dans cette 2.de des raisons sourdes, on voit aisément que la maniere dont les premieres sont égales, est tres-differente de celle dont le sont ces dernieres; car il paroît par les propositions fondamentales de la 1.re section S. 15. Que deux raisons de nombre à nombre ne sont égales, que par ce qu'elles ont les mêmes exposans, & qu'ainsi étant reduites, elles ne sont toutes deux qu'une seule & même raison. 8 *est à* 12, *comme* 100 *est à* 150. *par ce que la raison de* 8 *à* 12, *est la raison de* 2 *à* 3, *& que la raison de* 100 *à* 150, *est aussi la raison de* 2 *à* 3. XXXVII.

Mais il n'en est pas de même des raisons sourdes; car on ne peut point dire qu'elles ayent les mêmes exposans. Elles ne seroient plus sourdes si cela étoit. Ce n'est donc point de là qu'on doit prendre leur égalité, mais comme il a été prouvé dans le 1.er Theoréme du 2.d Livre, de ce que toutes les aliquotes pareilles des deux antecedens sont également contenuës dans les consequens, quoi que nulle aliquote du 1.er antecedent ne soit précisement

ment tant de fois dans son consequent, ni aussi l'aliquote pareille du 2.d antecedent dans le 2.d consequent; mais que ce soit toûjours au regard de l'un & de l'autre avec quelque reste.

Et c'est pourquoi dans les raisons de nombre à nombre, quand une seule aliquote pareille de chaque antecedent, par exemple un tiers, est également contenu dans chaque consequent, c'est à dire autant de fois dans l'un que dans l'autre, on n'a point besoin apres cela d'examiner d'autres aliquotes. Mais dans deux raisons sourdes, pour être assuré qu'elles sont égales, il faut avoir comme examiné toutes les aliquotes pareilles de l'un & de l'autre antecedent quoi qu'infinies, & être assuré que nulle du 1.er ne pourra étre dans son consequent avec quelque reste, que la pareille du 2.d antecedent ne soit autant de fois dans son consequent, quoi qu'avec aussi quelque reste, comme nous le demontrerons des lignes dans le 10.e Livre. Et ainsi l'on ne peut point dire à proprement parler que 2 raisons sourdes égales (sur tout quand leurs termes sont absolument incommensurables, tant lineairement qu'en puissance) se puissent reduire à une seule & même raison premiere; puisque l'on ne peut dire ni quelle des deux tiendroit lieu de premiere, ni qu'il y en ait une troisiéme qui soit plûtôt *raison premiere* que ces deux-là, à laquelle il les faille reduire pour les comprendre plus facilement; car assurement cela est impossible.

C'est pourquoi il faut prendre bien garde à ne pas étendre aux raisons entre deux étenduës, ce que nous avons dit dans les propositions fondamentales de la 1.re section: Que deux differentes raisons premieres ne pouvoient étre égales; car on ne l'a dit que des raisons de nombre à nombre, & cela n'a point de lieu dans les raisons sourdes entre deux étenduës.

Et c'est ce qui me fait croire que ceux qui se servent

vent de la consideration des exposans, qu'ils supposent être les mêmes dans toutes les raisons égales, pour expliquer les propriétez des proportions en general, que nous avons demontrées par une autre voye dans le commencement du 2.d Livre, font le même sophisme que celui qui ayant à expliquer la nature du genre, le feroit par ce qui ne convient qu'à une de ses especes, qui est un sophisme assez ordinaire, mais qui n'en est pas moins sophisme; car c'est ainsi par exemple qu'on explique les actions des bêtes par des pensées & des volontez qui ne conviennent qu'à l'homme, & qu'on le fait même au regard des choses inanimées : presque tout le monde s'imaginant que les pierres vont au centre de la terre, comme à un lieu de repos, par une inclination qui a quelque rapport à celle qui nous fait desirer ce que nous regardons comme nôtre bien.

Avertissement.

Tout ce qui suit jusques à la fin de ce Livre ne sont que des pensées détachées que l'on peut passer, mais où je croi neanmoins que l'on trouvera assez de choses nouvelles, ou demontrées d une nouvelle maniere.

SECTION TROISIE'ME.

Reflexions sur les nombres quarrez, & divers moyens de trouver les sommes de plusieurs nombres rangez en de certains ordres. XXXVIII.

De la difference entre deux quarrez.

Deux quarrez quelconques ont pour leur difference le produit de la somme de leurs racines, par la difference des mêmes racines.

Soient les deux quarrez *bb.* & *cc.*

Leur

Leur difference sera $bb - cc$.

Or la somme des racines est $b + c$; & leur difference est $b - c$.

Et le produit de l'un par l'autre donne $bb - cc$; ce qui est la difference des quarrez.

Exemple dans les nombres.

Ayant les deux quarrez 12, 12 (144) & 9, 9 (81.)

Je veux sçavoir tout d'un coup leur difference :
Je prens la somme des racines qui est 12 + 9 (21.)
Et leur difference 12 — 9 (3.).
3, 21 donne 63 qui est justement la difference de 144 à 81.

COROLLAIRE,

XXXIX. QUAND les Racines de deux quarrez ne different que d'une unité, leur difference est simplement la somme des racines ; car on ne fait rien davantage en la multipliant par l'unité.

Ainsi la difference entre 10, 10 (100) & 9, 9 (81) est 19 la somme des racines 10 & 9.

I. PROBLÉME.

XL. TROUVER des quarrez qui ayent entr'eux une difference donnée.

Soit h la difference donnée ; l'ayant divisée par celui qu'il me plaira de ses diviseurs, & appellant d ce diviseur & q le quotient, il est clair que dq est égal à h, & qu'ainsi ces deux quarrez auront h pour leur difference s'ils ont dq.

Or ils auront dq, si je donne au premier pour sa racine $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}q$.

Et au 2.d pour la sienne $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}q$. (remarquez qu'il faut mettre pour le premier de d ou de q, celui qui sera le plus grand.)

Ca

Car le quarré du 1.er sera $\frac{1}{4} dd + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{2} dq$; (car deux quarts font une moitié.)

Et le quarré du 2.d sera $\frac{1}{4} dd + \frac{1}{4} qq - \frac{1}{2} dq$.

Donc la difference entre ces quarrez sera deux moitiez de dq; c'est à dire dq qui est égal à b.

Exemple dans les nombres: Soit 80 la difference donnée. Je la divise par 20 & le quotient sera 4.

Donc la moitié de 20 (10) & la moitié de 4 (2) donneront les racines de ces deux quarrez; sçavoir 10 + 2 (12)
& 10 — 2 (8)
Car le quarré du 1er sera 100 + 4 + 2, 2, 10 (40)
Et le quarré du 2.d sera 100 + 4 — 40.

Donc leur difference est 80. qui est en effet la difference du quarré de 12 (144) au quarré de 8 (64.)

Corollaire.

Quand la moitié de l'un des deux du diviseur ou du quotient, seroit un nombre rompu, la même chose se rencontreroit. XLI.

Exemple: Soit la difference donnée 60, qui étant divisé par 12 donne 5. Je dis que le quarré de 6 plus $2\frac{1}{2}$ ($8\frac{1}{2}$) & de 6 moins $2\frac{1}{2}$ ($3\frac{1}{2}$) auront 60 pour leur difference.

Car le quarré de $8\frac{1}{2}$ est $72\frac{1}{4}$ & celui de $3\frac{1}{2}$ est $12\frac{1}{4}$ qui ont visiblement 60 pour leur difference.

On pourroit mêmes prendre l'unité pour diviseur (ce qui donneroit 60 pour quotient,) & ce seroit la même chose.

Car le quarré de $30 + \frac{1}{2}$ est $900 + \frac{1}{4} + 30$.
Et celui de $30 - \frac{1}{2}$ est $900 + \frac{1}{4} - 30$.

Donc ces deux quarrez ont 60 pour leur differen-

ce;

cc ; car le premier eſt 930 + $\frac{1}{4}$, & le dernier 870 + $\frac{1}{4}$.

II. Probleme.

XLII. Trouver tous les nombres dont le quarré eſt égal à deux quarrez.

Tout nombre compoſé de deux quarrez, comme 4 + 1 (5) 9 + 4 (13) 16 + 1 (17) 16 + 9 (25) a ſon quarré égal à deux quarrez. Et il n'y a que ces nombres là, ou leurs multiples, qui ayent cette proprieté.

Soit un nombre quelconque compoſé de 2 quarrez comme $bb + cc$. Il eſt impoſſible que ſon quarré ne ſoit pas égal au quarré du nombre $bb - cc$, & à celui du nombre $2.bc$. C'eſt à dire qui ſera le double du produit des deux racines.

Car $bb + cc$ a pour ſon quarré $b4 + c4 + 2\,bb\,cc$.

Et $bb - cc$ a pour ſon quarré $b4 + c4 - 2\,bb\,cc$.

Donc leur difference eſt $4\,bb\,cc$, qui eſt certainement un quarré qui a pour ſa racine, $2\,b\,c$. Donc ce quarré là, plus celui qui a pour ſa racine $bb - cc$, doivent étre égaux à celui dont la racine eſt $bb + cc$.

Donc il eſt impoſſible qu'un nombre compoſé de deux quarrez n'ait pas ſon quarré égal à deux quarrez.

Exemple dans les nombres. 29 eſt compoſé de deux quarrez, de 25 & de 4. Je dis donc que ſon quarré ſera égal au quarré de 25 — 4 (21,) & à celui de 2, 2, 5; c'eſt à dire de 20.

Car 25 + 4 a pour ſon quarré 625 + 16 + 2, 4, 25. (200.)

Et 25 — 4 a pour ſon quarré 625 + 16 — 200.

Donc

Donc leur difference eſt 400 qui eſt le quarré de 20.

Et en effet le 1.er de ces quarrez ſera 841.
Le ſecond 441.
Et le troiſiéme 400.

I. Corollaire.

Tout nombre quarré plus 1 fait un nombre, dont le quarré eſt égal à deux quarrez, comme 16 + 1. 36 + 1. Mais alors le ſecond quarré ayant pour ſa racine ce quarré primitif moins un, le troiſiéme eſt quatre fois ce même quarré, & a pour ſa racine deux fois la racine de ce quarré que j'ay appellé primitif. XLIII.

Exemple. 36 + 1. a pour ſon quarré 36, 36 (1296) + 1 + 2, 36 (72.)

Et 36 — 1 a pour ſon quarré 36, 36 (1296) + 1 — 2, 36 (72.)

Donc leur difference eſt 4, 36. (144) dont la racine eſt 2, 6 (12.)

II. Corollaire.

La plus grande moitié d'un quarré impair a ſon quarré égal à deux quarrez; ſçavoir au quarré de la plus petite moitié, & au quarré impair dont cette premiere racine eſt la plus grande *moitié*. XLIV.

Preuve generale. Soit hh un quarré impair, ſoit m ſa plus grande moitié & n la plus petite; (je les appelle ainſi, parce que je ſuppoſe qu'elles ne different que d'une unité) $m = n + 1$. Donc $m + n$ étant égal à hh, $n + n + 1$, ou $2n + 1$, ſeront auſſi égales à hh.

Et le quarré de $n + 1$ ſera la même choſe que mm.

Or $n + 1$ a pour ſon quarré $nn + 1 + 2n$.

Et $2n + 1 = hh$.

Donc *mm* = *nn* + *bb* ; ce qu'il falloit demontrer.

Exemple dans les nombres.

Le quarré de 25 a 13 pour sa plus grande partie, & 12 pour la plus petite.

Donc le quarré de 12 + 1 est la même chose que le quarré de 13.

Or 12 + 1 a pour son quarré 12, 12, (144) + 1 + 24.

Et 24 + 1, est 25. Donc 144 + 25 = 169 quarré de 13.

AVERTISSEMENT.

XLV. ON *dira peut-être qu'il n'est donc pas vrai qu'il n'y ait que les nombres composez de deux quarrez ou leurs multiples, qui ayent leur quarré égal à deux quarrez.*

Je nie la conséquence ; car il n'y a point de plus grande moitié de quarré impair qui ne soit composée de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la plus grande moitié de la racine de ce quarré impair & de la plus petite. Exemple : 25 quarré de 5 a 13 pour sa plus grande moitié, & 5 sa racine a 3 pour sa plus gande moitié, & 2 pour la plus petite. Je dis donc que 13 sera composé du quarré de 3 qui est 9, & du quarré de 2 qui est 4. Et voicy la raison pourquoi il faut necessairement que cela soit ainsi : c'est que le quarré de 5 est la même chose que le quarré de 3 + 2, qui est 9 + 4 + 2, 6 (12.) Et n'y ayant que l'unité de difference entre 3 & 2 : les deux quarrez de 3 & 2 ne sçauroient aussi être differens du double du produit des deux racines que d'une unité. C'est pourquoi les deux quarrez 9 & 4 feront toûjours la plus grande moitié du quarré de 5, & 2, 6 sa plus petite moitié.

III. Co-

III. COROLLAIRE.

LE double d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composé de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la somme des racines des deux premiers quarrez, & du quarré de leur difference. XLVI.

Soient bb & cc les 2 quarrez dont est composé le 1.er nombre. Je dis que le double de ce nombre là sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $b + c$, & l'autre $b - c$.

Car $b + c$ a pour son quarré $bb + cc + 2bc$.

Et $b - c$ a pour le sien $bb + cc - 2bc$.

Or $2bc$ étant par $+$ & par $-$ se reduit à zero. Reste donc $2bb$ & $2cc$ qui font le double de $bb + cc$.

Exemple dans les nombres. Le double de $25 + 4$ est 58.

Les racines de ces premiers quarrez sont 5 & 2.

Or $5 + 2$ a pour son quarré $25 + 4 + 2$, 10 (20,) ce qui fait en tout 49.

Et $5 - 2$ a pour son quarré $25 + 4 - 20$ ce qui fait 9. Donc le tout fait $49 + 9$, ce qui fait 58 double de 29.

IV. COROLLAIRE.

LA moitié d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composée de deux quarréz, sçavoir du quarré de la moitié de la somme des racines, & du quarré de la moitié de leur difference. XLVII.

Soient les deux quarrez bb & cc. Je dis que $\frac{1}{2} bb + \frac{1}{2} cc$, sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$, ce qui fait pour quarré $\frac{1}{4} bb + \frac{1}{4} cc + \frac{1}{2} bc$.

Et l'autre aura pour sa racine $\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c$, ce qui fait $\frac{1}{4} bb + \frac{1}{4} cc - \frac{1}{2} bc$.

Or ces deux quarrez ensemble tout compté & tout rabbatu font $\frac{1}{2}\,bb + \frac{1}{2}\,cc$, & par consequent la moitié du nombre composé de bb & cc.

Exemple dans les nombres. 208 est composé des quarrez 144 & 64. La somme de leurs racines est 12 + 8, dont la moitié est 10, & leur difference 4, dont la moitié est 2; donc le quarré de 10 (100) plus celui de 2 (4) doit être comme il est aussi la moitié de 208.

PROBLEMES.

Pour trouver les sommes de plusieurs nombres mis dans une certaine suite.

I. Probleme.

XLVIII. Trouver la somme d'une Progression Arithmetique quelque grande qu'elle soit, pourveu qu'on en connoisse le premier & le dernier terme, & le nombre des termes.

Il ne faudra qu'ajoûter le 1.er & le dernier, & multiplier ce nombre composé du 1.er & du dernier par la moitié du nombre des termes, ou le nombre des termes entier par la moitié de ce que font le premier & le dernier.

Exemple. Cent pierres étant arrangées de toise en toise, si un homme s'oblige à les ramasser toutes l'une apres l'autre, & les mettre en un tas à une toise prés de la premiere: combien fera-t'il de toises de chemin? Il en fera deux pour la 1.re pierre, 4 pour la 2de, & 200 pour la derniere. Ce sera donc une Progression Arithmetique de 100 termes, dont le premier & le dernier feront 202. Il faut donc multiplier ou 50 par 202, ou 100 par 101, ce qui fera 10100; c'est à dire 12120 pas Geometriques; ce qui fait plus de 4 lieuës.

II. Pro-

II. PROBLEME.

TROUVER la somme d'une Progression Geometrique, supposant qu'elle va en augmentant comme c'est le plus ordinaire, & qu'ainsi l'antecedent de chaque raison est plus petit que son consequent. XLIX.

Soit la somme de tous les termes appellée S.

Le premier terme *a*, le 2.[d] *b*, & le dernier *ω*, & les exposans de la raison qui regne par toute la Progression *n* & *m*; c'est à dire que deux termes qui se suivent immediatement sont entr'eux comme *n* est à *m*, ou comme *a* est à *b*, si la premiere raison est déja dans les moindres termes qu'elle peut-être.

Or tous les termes étant antecedens, hors le dernier qui n'est que consequent, & tous consequens, hors le premier qui n'est qu'antecedent: Tous les antecedens se pourront nommer $S-\omega$. Et tous les consequens $S-a$.

Cela supposé, je dis que le dernier moins le 1[er], (c'est à dire $\omega-a$) est à toute la somme moins le dernier, (c'est à dire à $S-\omega$) comme $m-n$, est à n, ou comme $b-a$ est à a. Et en voici la raison:

Par ce qui a été dit II. 52. dans une Progression Geometrique tous les antecedens sont à tous les consequens, comme un antecedent est à un consequent.

Donc *permutando*, tous les consequens sont à tous les antecedens comme un consequent est à un antecedent.

Donc *dividendo*, tous les consequens moins tous les antecedens sont à tous les antecedens, comme un consequent moins son antecedent est à son antecedent.

Or quand je dis, *tous les consequens moins tous les antecedens*, c'est comme si je disois le dernier terme moins le premier ($\omega - a$;) car tous les termes étant consequens hors le premier, je les mets tous par *plus*, hors le premier, quand je dis, *tous les consequens :* & étant tous antecedens hors le dernier, je les mets tous par *moins* hors le dernier, quand je dis *moins tous les antecedens.* Ils sont donc tous, hors le premier & le dernier, par *plus* & par *moins*, & par consequent se reduisent à rien. Et il n'y a que le dernier qui ne soit que par *plus*, & le premier qui ne soit que par *moins.* Donc cela se reduit au dernier moins le premier ($\omega - a$.)

Donc quand la Progression est ascendante, le dernier terme moins le 1.er est à tous les termes moins le dernier, comme le 2.d terme moins le premier est au premier.

En voici la preuve par la Specieuse:

$S - a. \ S - \omega. :: b. \ a.$

Donc *dividendo* $S - a - S + \omega. \ S - \omega :: b - a. \ a.$

Or dans le premier terme de cette proportion S étant par *plus* & par *moins* se reduit à rien. Reste donc ω par *plus* & a par *moins.* Donc cela ne veut dire qu'$\omega - a$.

Mais si la Progression étoit descendante, chaque antecedent étant plus grand que son consequent, il ne faudroit que changer & dire:

Que le 1.er terme moins le dernier seroit à tous les termes moins le premier, comme un antecedent moins son consequent est à son consequent, $a - \omega. \ S - a :: n - m. \ m.$

I. Corollaire.

On pourra prouver facilement par là que si on prend d'un tout une dixiéme, & une dixiéme de cette dixiéme, c'est à dire $\frac{1}{100}$; & une dixiéme de cette centiéme, c'est à dire $\frac{1}{1000}$, & ainsi jusques à l'infiny : toutes ces dixiémes de dixiémes prises à l'infiny ne feront que $\frac{1}{9}$ du tout; & les neuviémes de neuviémes prises de la même sorte $\frac{1}{8}$; & les huitiémes de huitiémes $\frac{1}{7}$; & ainsi en diminuant toûjours les denominateurs d'un, les quars un tiers, les tiers une moitié, & les moitiés le tout. I.

Il ne faut pour cela que faire une Progression Geometrique en cette maniere : $1. \frac{1}{10}. \frac{1}{100}. \frac{1}{1000}.$ & ainsi à l'infiny.

Donc, par ce qui vient d'être dit, 1 moins le dernier terme (qui se reduit à zero, la progression allant à l'infiny, de sorte qu'on le doit prendre simplement pour 1,) est à tous les termes de la Progression moins un, c'est à dire à toute cette infinité de dixiémes de 10.mes comme $1 - \frac{1}{10}$ est à $\frac{1}{10}$, c'est à dire comme $\frac{9}{10}$ est à $\frac{1}{10}$, & par consequent comme 9 à 1. Donc toute cette infinité de dixiémes de 10.mes n'est au tout que comme 1 à 9. Donc elles ne sont que la 9.e partie du tout; ce qu'il falloit demontrer.

II. Corollaire.

On voit par là la solution du sophisme des anciens contre le mouvement. II.

Supposant, disoient-ils, qu'Achille aille 10 fois plus vîte qu'une tortuë, si la tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achille ne l'attrapera; car tandis

qu'Achille fera la 1.re lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de la 2.de lieuë; & tandis qu'Achille fera la $\frac{1}{10}$ de la 2.de lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de cette $\frac{1}{10}$, & ainsi à l'infini.

Tout cela suppose que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini fassent une espace infini, au lieu qu'elles ne font toutes ensemble qu'$\frac{1}{9}$ de lieuë, selon le Theoréme precedent.

Et c'est pourquoi Achille doit attraper la tortuë à la premiere $\frac{1}{9}$ de la 2.de lieuë. Car allant 10 fois plus vîte que la tortuë, il doit avoir fait dix fois autant de chemin dans le même temps.

Donc pendant que la tortuë parcourra une $\frac{1}{9}$ de lieuë, Achille en doit parcourir $\frac{10}{9}$, ce qui fait justement la premiere lieuë composée de $\frac{9}{9}$, plus $\frac{1}{9}$ de la seconde lieuë.

III. Corollaire.

111. Si une horloge a deux aiguilles, l'une des heures, qui fait son tour en 12 heures, & l'autre des minutes, qui fait le même tour en une heure, marquer tous les points ausquels ces deux aiguilles se rencontreront?

Ce sera à ces heures-ici : $1+\frac{1}{11}$. $2+\frac{2}{11}$ $3+\frac{3}{11}$. $4+\frac{4}{11}$. $5+\frac{5}{11}$. $6+\frac{6}{11}$. $7+\frac{7}{11}$. $8+\frac{8}{11}$. $9+\frac{9}{11}$. $10+\frac{10}{11}$. $11+\frac{11}{11}$. C'est à dire 12 heures.

La preuve en est aisée à deviner par celle du premier Corollaire.

III. Pro-

III. PROBLEME.

TROUVER la suite des nombres triangulaires, pyramidaux & plus que pyramidaux. LIII.

Pour bien comprendre ceci, il faut remarquer qu'on peut disposer les nombres en plusieurs bandes, qui seront telles que chaque nombre d'une bande sera égal à tous ceux de la bande precedente inclusivement jusques à celui-là; c'est à dire, par exemple, que le 2.[d] de la troisiéme bande sera égal aux deux premiers de la 2,[de] le 3.[e] aux trois premiers, le 4 aux quatre premiers, & ainsi de suite jusqu'à l'infini.

On le comprendra mieux par l'exemple de 6 bandes que je ne continuërai que jusques à 9 termes.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495
6	1	6	21	56	126	252	46	792	1287

La premiere bande n'est que d'unitez.

La deuxiéme des nombres ordinaires, dont on voit assez que chacun comprend autant d'unitez qu'il y a eu de termes dans la premiere bande jusques à ce terme de la 2.[de]

La troisiéme est des nombres qu'on appelle Triangulaires, parce qu'ils se peuvent disposer en triangle.

La quatriéme de ceux qu'on appelle Pyramidaux.

La cinquiéme des seconds-Pyramidaux. Je ne sçai si on leur a donné un autre nom.

La sixiéme des troisiémes Pyramidaux. Et cela se peut continuer jusques à l'infiny.

Il s'agit donc de trouver la somme de tant de nombres que l'on voudra à commencer toûjours par l'unité dans chacune de ces bandes, par exemple la somme des dix premiers termes de la troisiéme bande, ou de la quatriéme, ou de la cinquiéme. Et il faut remarquer que c'est la même chose de trouver la somme des dix premiers termes de la troisiéme bande, c'est à dire des dix premiers nombres triangulaires, que de trouver le dixiéme nombre pyramidal.

Voilà une regle generale pour cela que je tiens d'un fort habile homme. Je la pourrois proposer generalement : mais j'aime mieux l'appliquer tout d'un coup à un exemple particulier par lequel on jugera sans peine de tous les autres.

Je veux chercher la somme des 10 premiers termes de quelque bande que ce soit. Je mets 10, & puis 11, & puis 12, &c. comme des nombres qui se doivent multiplier les uns les autres, selon la bande dont on veut sçavoir la somme des dix premiers termes : & je mets 1, 2, 3, &c. au dessous de chacun de ces nombres, en cette maniere :

10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	&c.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	&c.

Les nombres de dessous sont pour diviser les produits des nombres de dessus ; car si j'ai besoin de multiplier les 3 premiers nombres les uns par les

les autres, je les diviserai par le produit des 3 de dessous, qui ne font que 6, parce que l'unité ne change rien en divisant.

Cela supposé, si je veux avoir la somme de dix termes de la 1.re bande, je ne prens que le premier chiffre d'enhaut qui marque [redacted]e dix termes, dont je veux avoir la somme. Et ce nombre me la donne sans qu'il soit divisé, parce que l'unité qui est au dessous ne divise point.

Mais si je veux avoir la somme de dix termes de la 2.de bande, je multiplie les deux premiers nombres de dessus; c'est à dire 10 par 11, ce qui fait 110, & les divise par les deux de dessous; c'est à dire par une fois 2, ce qui donne 55. Mais pour faire cela plus facilement, avant que de faire la multiplication je divise par 2 l'un des deux chiffres qui le peut être, & je multiplie l'autre nombre par sa moitié, c'est à dire 11 par 5; ce qui donne encore 55.

Si je veux avoir la somme de dix termes de la 3.e bande, je me sers pour cela des trois premiers chiffres d'enhaut, & je commence par diviser ou 10 par 2 & 12 par 3, ou tout d'un coup 12 par 6; (car cela revient au même,) & je multiplie les uns par les autres 5, 11, 4, ou 10, 11, 2, ce qui donnera 220, qui font la somme des dix premiers chiffres de la 3.e bande.

Pour la 4.e bande, je me sers des 4 chiffres d'enhaut, les ayant auparavant divisez par ceux d'embas, sçavoir 10 par 2, & 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à 1, qui ne fera rien dans la multiplication des chiffres d'enhaut, & ainsi ils se reduiront à 5, 11, 13, ce qui fait 715.

Pour la 5.e bande, on en fera autant des 5 chiffres d'enhaut, on les divisera autant que l'on pourra par ceux d'embas en cette maniere: 14 par 2, ce qui donnera 7; 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à rien au regard de la multiplication à faire; & 10 par 5,

ce qui donnera 2. Et ainsi ces 5 nombres ne seront plus que 2, 11, 13, 7, ce qui fait 2002.

Je n'en dirai pas davantage. On voit assez comment cela se doit faire pour toutes les bandes suivantes, & pour toute autre quantité de termes dont on voudra sçavoir la somme, comme la somme des 100 premiers termes de quelque bande que ce soit; car laissant toûjours en bas 1, 2, 3, &c. ce qui est invariable pour diviser les nombres d'enhaut: il faudra mettre pour ces nombres d'enhaut 100, 101, 102. 103, &c.

Mais j'avouë franchement que je ne sçay la raison de cela que pour la 2.de & la 3.e bande, & non pour les autres.

Observations sur les nombres Triangulaires.

CIV. J'AY déja dit qu'on appelloit Triangulaires les nombres de la 3.e bande. Or comme je pretens m'en servir pour trouver avec beaucoup de facilité la somme des quarrez & des cubes : j'ay besoin d'en remarquer quelques proprietez.

La 1.re est que deux nombres triangulaires qui se suivent immediatement font, pris ensemble, le quarré du nombre qui répond au plus grand des deux. On le verra par la table & en voici la raison:

Je dis donc que le nombre Triangulaire de 9 & celui de 10, doivent faire ensemble le quarré de 10 qui est 100. Car pour avoir le nombre triangulaire de 9, il faut multiplier 9 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 9; & pour avoir celui de 10, il faut multiplier 11 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 11. Or 9 & 11 faisant 20, il est visible que ces deux multiplications ensemble font 5, 20; c'est à dire 100.

Autrement 5, 10 — 1 font 50 — 5.
Et 5, 10 + 1 font 50 + 5.

Or

Or cela fait ensemble 2, 50, c'est à dire 100.

Autre exemple. Le nombre Triangulaire de 8 est 4, 9.

Et celui de 9 est 5, 9;

Ce qui fait ensemble 9, 9 ou 81.

La 2.de proprieté est que [redacted] Triangulaires qui se suivent ont pour leur difference le nombre naturel qui répond au plus grand.

Et il faut bien que cela soit ainsi; car le 9.me nombre Triangulaire est la somme des 9 premiers nombres, & le 10.e la somme des 10 premiers qui par consequent ne peut differer de l'autre, que parce qu'elle a 10 de plus.

On peut encore remarquer une 3.e proprieté de ces nombres Triangulaires, qui est assez urprenante, quoi qu'elle ne soit pas de grand usage. C'est que tout nombre quarré impair, moins 1, se pouvant diviser par 8, pour trouver combien 8 y sera de fois, il ne faut que prendre le nombre triangulaire de la plus petite moitié de la racine de ce quarré impair. Exemple; 8 est 45 fois dans le quarré de 19, parce que le nombre triangulaire de 9 (qui est la plus petite moitié de 19) est 45. Et 8 est 120 fois dans le quarré de 31, parce que 120 est le nombre Triangulaire de 15, qui est la plus petite moitié de 31.

De la premiere proprieté il s'ensuit que toute quantité de nombres quarrez pris de suite, (ce qui se suppose toûjours) contient deux fois la même quantité des nombres Triangulaires moins le dernier qu'elle ne contient qu'une fois. Car chaque nombre Triangulaire entre deux fois dans la composition d'un quarré, hors le dernier qui n'y entre qu'une fois: 1. dans le 1er, qui est aussi 1. Et dans le 2.^{d} qui est 1 + 3; & 3 qui est entré dans le 2.^{d} quarré, qui est 4, entre avec 6 dans le 3.e qui est 9; & 6 avec 10 dans le 4e. qui est 16; & 10 avec 15 dans le 5.e qui est 25; & 15 avec 21 dans le 6.e qui est 36.

 On

On voit donc que si on en demeure-là, il n'y aura que 21, sixiéme nombre Triangulaire, qui n'entrera qu'une fois dans l'un des 6 premiers quarrez; & par consequent tous les autres y entrant deux fois, il est donc clair que la somme des 6 quarrez p[illegible] doit être égale au double de la somme des 6 premiers nombres triangulaires.

IV. Probleme.

LV. Trouver la somme de tant de nombres quarrez de suite que l'on voudra, c'est à dire des 10 premiers, des 20, des 100, &c.

On n'a, selon ce qui vient d'être dit, qu'à avoir la somme d'autant de nombres Triangulaires; c'est à dire de ceux de la 3.e bande, la doubler, & puis en ôter le dernier des nombres Triangulaires dont a trouvé la somme.

Le 10.e nombre Triangulaire est 55. La somme des 10 premiers est 220, comme on l'a déja fait voir. Le double est 440, d'où ôtant 55, on aura 385 pour la somme des 10 premiers quarrez.

Autrement. Faites comme si vous vouliez avoir la somme des 10 premiers nombres Triangulaires, en mettant au dessous 1, 2, 3, ou seulement 2, 3, car l'1 ne sert que pour l'analogie, & au dessus 10, 11; mais au lieu du troisiéme qui est 12, mettez la somme des deux premiers qui est 21, ainsi:

$$\frac{10,\ 11,\ 21.}{2,\ 3.}$$

Puis ayant divisé 10 par 2, ce qui donne 5, & 21 par 3, ce qui donne 7: multipliez les uns par les autres 5, 11, 7, ce qui donnera 55, 7; cela fait 385.

Cette derniere façon revient à l'autre; car il faut remarquer que si au lieu de prendre pour troisiéme nombre le premier plus 2, on prend le double du 1.er plus 1: il se trouve toûjours que ce der-

dernier, plus 3, est double de celui dont on se sert pour trouver la somme des Triangulaires : d'où il arrive que divisant l'un & l'autre par 3, celui dont on se sert pour les quarrez, plus 1, est double de l'autre. 21 plus 3 est double de 12; & le tiers de 21 étant 7: 7 + [redacted] qui est le tiers de 12.

V. PROBLEME.

TROUVER la somme de tant de Cubes que l'on voudra en les prenant de suite, c'est à dire LVI.
des 10 premiers, des 20 premiers, &c.

Le quarré du nombre triangulaire qui répond au nombre des Cubes dont on veut avoir la somme est la somme des Cubes: c'est à dire que si on veut avoir la somme des 10 premiers Cubes, il ne faut que trouver le 10.e nombre Triangulaire qui est 55, & son quarré qui est 3025 sera le nombre des Cubes.

On le peut prouver en deux manieres, l'une plus subtile, & l'autre plus naturelle. La 1.re dépend des deux propriétez des nombres triangulaires.

Car par la 1re, deux triangulaires qui se suivent font ensemble le quarré du nombre qui répond au plus grand; c'est à dire que le 5.e qui est 15, & le 6.e qui est 21, font ensemble le quarré de 6 qui est 36.

Et par la seconde ces deux mêmes Triangulaires ont 6 pour leur difference. D'où il s'ensuit que les prenant pour racines de deux quarrez: ces quarrez auront pour leur difference la somme de ces deux racines, qui est 36, multipliée par leur difference, qui est 6; c'est à dire qu'ils auront pour leur difference le cube de 6.

Or pour voir plus facilement ce qui suit delà, nous marquerons chaque nombre triangulaire par un

un accent circonflexe que nous mettrons au dessus du nombre qui marque sa place ; c'est à dire que 6 sera le sixiéme nombre Triangulaire qui est 21 ; 5 le cinquiéme qui est 15, & ainsi des autres.

Et pou[illegible]quarré de chacun nous mettrons seulement 6^2. 5^2. Et les Cubes des nombres ordinaires 6^3. 5^3. 4^3, &c. Cela étant :

$$6^2 = \left\{\begin{matrix} 6^3 \\ 5^2 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 5^3 \\ 4^2 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 4^3 \\ 3^2 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 3^3 \\ 2^2 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 2^3 \\ 1 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

D'où il s'ensuit que laissant là les quarrés des autres nombres Triangulaires, parce que l'on a leurs équivalens, le seul quarré du sixiéme nombre, qui est 441, est égal à la somme des six premiers nombres cubes.

L'autre raison est plus simple, & on la peut exprimer ainsi : La somme de tant de nombre cubiques de suite que l'on voudra, est le produit de la somme de toutes les racines multipliée par cette même somme de racines ; car prenant, comme il le faut, ces nombres cubiques d'ordre, leurs racines seront toûjours autant de nombres naturels que l'on prendra de Cubes dont on voudra sçavoir la somme.

Soient donc tant de nombres naturels que l'on voudra en commençant par 1.

Les multipliant par autant d'autres tous les mêmes : 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. 1. 2. 3. 4. 5, 6. &c.

Il se fera autant de multiplications partiales, que sera le quarré des termes que l'on prendra ; c'est à dire que si on n'en prend que 5, il y aura 25 multiplications partiales. Si 6, il y en aura 36, &c.

Mais il faut remarquer 1. Que de ces multiplications partiales, les directes comme 2, 2. 3, 3. sont toûjours simples, & que celles qui se font en croix, comme 2, 3 ; 3, 5, &c. sont toûjours doubles.

En

En second lieu, que c'est la même chose de multiplier 6 par 2 + 4 que de le multiplier separement par 2, en disant 2, 6. & par 4 en disant 4, 6. Il faut seulement remarquer que la multiplication de 2 + 4 par 6, comprend deux des 36 multiplications partiales [illegible] doit avoir [illegible] multiplication des 6 premiers nombres par eux-mêmes; & qu'y ajoûtant *bis* cela en fait 4.

Cela supposé, voicy comme ces 36 Multiplications partiales feront les 6 premiers Cubes.

Denomb. des Mult. partiales.		Mult. partiales.			Cubes.
1		1, 1	1	1	1
3	1	2, 2	4	2, 4.	8
	2	1, 2 *bis*	4		
5	1	3, 3	9	3, 9.	27
	4	1 + 2, 3 *bis*	2, 9		
7	1	4, 4	16	4, 16.	64
	4	1 + 3, 4 *bis*	2, 16		
	2	2, 4 *bis*	16		
9	1	5, 5	25	5, 25.	125
	4	1 + 4, 5 *bis*	2, 25		
	4	2 + 3, 5 *bis*	2, 25		
11	1	6, 6	36	6, 36.	216
	4	1 + 5, 6 *bis*	2, 36		
	4	2 + 4, 6 *bis*	2, 36		
	2	3, 6 *bis*	36		

Somme 36.

On voit par là, que le premier nombre multiplié par soy-même ne donne qu'une multiplication qui fait un premier nombre cube.

Que les deux premiers 1. 2. multipliez aussi par eux-mêmes, (ce qui se doit toûjours sous-entendre sans qu'il soit besoin de l'exprimer,) en donnent



nent 4, dont une étant déja prise, les trois autres donnent 8, second nombre cube.

Que les trois premiers 1. 2. 3. en donnent 9, dont 4 étant prises, qui ont donné les deux premiers cubes, les cinq qui restent donnent le 3.e 27.

Que les quatre 1. 2. 3. 4. en donnent 16, dont 9 étant déja prises, qui ont donné les trois premiers cubes; les 7 qui restent donnent le 4.e 64.

Que les cinq 1. 2. 3. 4. 5. en donnent 25, dont 16 étant déja prises, qui ont donné les 4 premiers cubes, les 9 qui restent donnent le 5.e 125.

Que les six 1. 2. 3. 4. 5. 6. en donnent 36, dont 25 étant déja prises, qui ont donné les cinq premiers cubes, les 11 qui restent donnent le 6.e 216.

Et on voit sans peine que cela doit aller jusqu'à l'infiny.

Mais pour éviter l'embarras & la longueur de ces multiplications partiales, (ce qui n'a servi qu'a la preuve:) Il ne faut que prendre la somme de toutes ces racines, (c'est à dire de tant que l'on voudra de nombres naturels,) & la multiplier par elle-même; car il est visible que c'est la même chose de multiplier 3 par 3, que de multiplier 1 + 2 par 1 + 2.

Or la somme de ces nombres naturels est ce qu'on appelle nombre triangulaire; car 6 par exemple, est le nombre triangulaire de 3, parce que 1 + 2 + 3 font 6. Donc en multipliant le dixiéme nombre triangulaire qui est 55 par soy-même, on aura la somme des dix premiers cubes.

Or rien n'est plus facile que de trouver le nombre triangulaire de tel nombre que l'on veut; car si c'est un nombre impair, il ne faut que le multiplier par sa plus grande moitié: 5. 3, 5. 7. 4, 7. 9. 5, 9. 11. 6, 11. Et

Et si c'est un nombre pair, il ne faut que prendre sa moitié & multiplier par là ce nombre plus un. 6. 3, 7. 8. 4, 9. 10. 5, 11. 12. 6, 13. 14. 7, 15.

Comment il se faut con[illegible]*ous les Problemes semblables à ceux de la mule & de l'asnesse, des deux vases qui ont un même couvercle, &c.*

PREPARATION.

Il faut écrire les hypotheses en donnant des noms aux quantitez inconnuës. Exemple, *Mule, Asnesse.*

Le nombre des sacs que porte la mule soit appellé A ; & celui que porte l'asnesse B.

HYPOTHESES.

1.re Hyp. $A - 3 = B + 3$	Si la mule donne à l'asnesse trois de ses sacs, ils en auront autant l'une que l'autre. LVII.
2.de Hyp. $A + 1 = 3B - 3$	Si l'asnesse donne à la mule l'un de ses sacs, la mule en portera 3 fois autant que l'asnesse.

Ayant ces Hypotheses, il faut trouver les équivalens ; c'est à dire l'équivalent d'A par B plus ou moins ce qu'il faut, & l'équivalent de B par A plus ou moins ce qu'il faut.

Pour trouver les équivalens d'une Hypothese : il faut ôter d'un membre les chiffres & laisser la lettre seule, & transporter les chiffres dans l'autre membre, en changeant le signe. Exemple :

EQUIVALENS.

Par la 1.re Hyp. $\begin{cases} A = B + 6. \\ B = A - 6. \end{cases}$

Par la [illegible] Hyp. $\begin{cases} A = 3B - 4. \\ \text{[illegible]}\ A + 4. \end{cases}$

Ayant ces équivalens, on resout sans peine les Problemes. Il ne faut pour cela que reprendre les Hypotheses: & si on veut resoudre le Probleme par la premiere, il faut se servir des équivalens de la seconde; & au contraire si on le veut resoudre par la seconde Hypothese, il faut se servir des équivalens de la premiere; & par là, on fera que dans l'équation de chaque hypothese il n'y ait que les mêmes lettres dans l'un & dans l'autre membre.

I. PROBLEME. HYPOTHESES.

LVIII. $\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix} \begin{cases} A - 3 = B + 3. \\ A + 1 = 3B - 3. \end{cases}$

EQUIVALENS.

Par la 1.re Hyp. $\begin{cases} A = B + 6. \\ B = A - 6. \end{cases}$

Par la 2de Hyp. $\begin{cases} A = 3B - 4. \\ 3B = A + 4. \end{cases}$

I. Solution par la 1.re Hypothese en reduisant tout en B.

1.re Hypothese $\begin{cases} A - 3 = B + 3. \\ A = 3B - 4. \end{cases}$
Equivalent de la 2.de

Je puis donc mettre au lieu d'A, 3 B — 4; donc mettant dans le second membre l'équation 7 qui est par moins dans le premier,

3B

$3B = B + 10.$
Donc $2B = 10.$
Donc $B = 5.$

II. Solution par la 1.^d Hypotheſe en reduiſant l[illegible] B.

2.de Hypotheſe. $\{ A + 1 = 3B - 3.$
1. Eq. de la 1.re Hyp. $\{ A = B + 6.$
Mettant donc $B + 6$ au lieu d'A,
$B + 7 = 3B - 3.$
Donc $B + 10 = 3B.$
Donc $10 = 2B.$
Donc $5 = B.$

III. Solution par la 2. Hypotheſe en reduiſant tout en A.

2.de Hypotheſe. $\{ A + 1 = 3B - 3.$
1.^d Equiv. de la 1.re $\{ B = A - 6.$
Donc mettant au lieu de 3 B, trois fois $A - 6$, qui font $3A - 18$:
$A + 1 = 3A - 18 - 3$, [c'eſt à dire $- 21$;] & tranſportant 21 dans le premier membre en changeant le ſigne :
$A + 22 = 3A.$
Donc $22 = 2A.$
Donc $11 = A.$
Donc A eſt 11 & B 5;
C'eſt à dire que la mule avoit 11 ſacs, & l'aſneſſe 5.

II. PROBLME. LIX.

Hypotheſes 1.re $\{ A - 9 = B + 9.$
2.^de $\{ A + 3 = 3B - 9.$
Equivalens de $\{ A = B + 18.$
la 1.re Hypoth. $\{ B = A - 18.$

Equiv.

Equivalens de $\{ A = 3B - 12.$
la 2.de $\{ 3B = A + 12.$

I. Solution par la 1.re Hypotheſe en reduiſant tout en B.

1.re Hypotheſe [illegible] $- 9 = B + 9.$
1.er Equiv. de la 1.re $\{ A = 3B - 12.$
$3B - 12 - 9$, [c'eſt à dire $- 21 = B + 9.$
Donc $3B = B + 30.$
Donc $2B = 30.$
Donc $B = 15.$

II. Solution par la 2.de Hypotheſe en reduiſant tout en A.

2.de Hypotheſe. $\{ A + 3 = 3B - 9.$
2.d Equiv. de la 1.re $\{ B = A - 18.$
$A + 3 = 3A - 63.$
Donc $A + 66 = 3A.$
Donc $66 = 2A.$
Donc $33 = A.$ C'eſt à dire que A eſt 33 & B eſt 15.

III. Solution par la 2.de Hypotheſe en reduiſant tout en B.

$3B - 9 = B + 21.$
Donc $3B = B + 30.$
Donc $2B = 30.$
Donc $B = 15.$

III. Probleme.

11. Hypotheſes 1.re $\{ A + 2000 = 4B.$
2.d $\{ B + 1000 = \frac{1}{2}A.$
Equiv. de la 1.re $\{ A = 4B - 2000.$
de la 2.de $\{ B = \frac{1}{2}A - 1000.$

I. So-

I. Solution par la 1.re Hypothese.

$A + 2000 = 2A - 4000.$

Donc $A + 6000 = 2A.$

Donc $6000 = A.$

II. Solution par la 2.d Hypothese.

$B + 1000 = 2B$ — [illegible]

Donc $B + 2000 = 2B.$

Donc $2000 = B.$

III. Solution par la 1.re Hypothese.

$A + 2000 = 4B.$

Donc $\frac{1}{4}A + 500 = B.$

Or $B = \frac{1}{2}A - 1000.$

Donc $\frac{1}{4}A + 500 = \frac{1}{2}A - 1000.$

Donc $\frac{1}{4}A + 1500 = \frac{1}{2}A.$

Donc $1500 = \frac{1}{4}A.$

Donc $6000 = A.$

IV. PROBLEME.

Hypothese 1.re $\begin{cases} A + 3000 = 3B. \end{cases}$
2.de $\begin{cases} B + 1000 = \frac{1}{2}A. \end{cases}$

Equiv. de la 1.re $\begin{cases} A = 3B - 3000. \end{cases}$
de la 2de $\begin{cases} B = \frac{1}{2}A - 1000. \end{cases}$

I. Solution par la 1.re Hypothese.

$A + 3000 = A\frac{1}{2} - 3000.$

Donc $A + 6000 = A\frac{1}{2}.$

Donc $6000 = \frac{1}{2}A.$

Donc $12000 = A.$

II. Solution par la 2.de Hypothese.

$B + 1000 = B\frac{1}{2} - 1500.$

Donc $B + 2500 = B\frac{1}{2}.$

Donc $2500 = \frac{1}{2}B.$

Donc $5000 = B.$

V. PRO-

V. PROBLÉME.

§. XII. Hypothſe 1.re $\{ A + 3000 = 9B.$
Hypotheſe 2.de $\{ B + 5000 = \frac{1}{3}A.$
Equiv. [illegible] la 1.re [illegible] $B - 3000.$
Equiv. de la [illegible] $= \frac{1}{2}A - 5000.$

I. Solution par la 1.re Hypotheſe.

$A + 3000 = 3A - 45000.$
Donc $A + 48000 = 3A.$
Donc $48000 = 2A.$
Donc $24000 = A.$

II. Solution par la 2.de Hypotheſe.

$B + 5000 = 3B - 1000,$
Donc $B + 6000 = 3B.$
Donc $6000 = 2B.$
Donc $3000 = B.$

VI. PROBLÉME.

§. XIII. Hypotheſe 1.re $\{ A - 25 = B + 25.$
Hypotheſe 2.de $\{ A + 25 = 2B - 50.$
Equiv. de la 1.re $\{ A = B + 50.$ $\{ B = A - 50.$
Equiv. de la 2.de $\{ A = 2B - 75.$ $\{ B = \frac{1}{2}A + 37\frac{1}{2}.$

I. Solution par la 1.re Hypotheſe.

$B + 25 = 2B - 100.$
Donc $B + 125 = 2B.$
Donc $125 = B.$

II. Solution par la 2de Hypotheſe.

$A + 25 = 2A - 150.$
Donc $A + 175 = 2A.$
Donc $175 = A.$

NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE CINQUIE'ME.

DE L'E'TENDUË.

DE LA LIGNE DROITE ET CIRCULAIRE.

DES DROITES, PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES.

DEFINITIONS.

NOus *avons parlé jusques icy de la grandeur en general : il faut maintenant descendre à ses especes.* 1.

TOUTE grandeur est continuë, comme est l'étenduë, le tems, le mouvement : ou non continuë, comme le nombre.

La continuë eſt ou ſucceſſive, comme le tems, le mouvement.

Ou permanente, qui s'appelle generalement *eſpace* ou *étenduë*.

Mais elle ſe conſidere ou ſelon toutes ſes trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur, & alors elle s'appelle *corps* ou *ſolide*.

Ou ſelon deux ſeulement, longueur & largeur, & alors elle s'appelle *ſurface* ou *ſuperficie*, qui eſt ou plate, qui s'appelle *plan*, ou non plate, qui s'appelle *ſurface courbe*.

Ou ſelon une ſeulement, qui eſt la longueur, & alors elle s'appelle *ligne*, qui eſt ou droite ou courbe.

L'extrémité de la ligne s'appelle *point*, qui doit être conceu indiviſible. Car s'il pouvoit être partagé en deux, l'une de ces moitiez ne ſeroit pas à l extrémité de la ligne.

Et par la même raiſon la ligne qui eſt indiviſible ſelon la largeur, parce qu'elle eſt conſiderée comme n'en ayant point, eſt l'extrémité de la ſurface.

Et la ſurface qui eſt auſſi indiviſible ſelon la profondeur, eſt l'extrémité du corps.

PREMIER AVERTISSEMENT.

II. LES *idées d'une ſurface plate & d'une ligne droite ſont ſi ſimples, qu'on ne feroit qu'embroüiller ces termes en les voulant definir. On peut ſeulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue.*

SECOND AVERTISSEMENT.

III. QUOI *qu'il n'y ait point au monde d'étenduë qui n'ait que longueur & largeur ſans profondeur, ou longueur ſans largeur ni profondeur, & encore moins*

moins de point qui n'ait ni longueur, ni largeur, ni profondeur: ce que disent les Geometres des surfaces, des lignes & des points ne laisse pas d'être vray; parce qu'il suffit pour cela que dans un corps qui est veritablement long, large & profond, je puisse n'en considerer que la longueur & la largeur, sans faire attention à la pro[illegible] mêmes la longueur seule sans m'arrester ni à la largeur, ni à la profondeur. Ainsi pour mesurer un champ, je ne m'amuse pas à creuser pour sçavoir si la terre y est bien profonde, mais je regarde seulement combien il est long & large: Et pour sçavoir combien il y a de Paris à Orleans, je ne mesure pas la largeur des chemins, mais seulement la longueur. Et de même ce qu'on appelle Point *n'est que la ligne même, entant qu'on n'y considere que la negation d'une plus longue étenduë.*

TROISIÉME AVERTISSEMENT.

ON *doit commencer par la ligne comme par la plus simple étenduë: & de plus pour en rendre la consideration plus facile, lors que l'on compare plusieurs lignes ensemble, on les suppose toûjours dans ces premiers élemens comme étant posées ou décrites sur un même plan, c'est à dire sur une même, superficie plate; ce qu'il suffit d'avoir dit une fois pour toutes.* IV.

PREMIERE SECTION.

DE LA LIGNE DROITE.

Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en est trés claire d'elle même, & que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot. Mais il est bon de remarquer ce que nous concevons naturellement être renfermé dans V.

cetté idée, ce que l'on pourra prendre si l'on veut pour sa definition.

La ligne droite est la plus courte étenduë entre deux points.

Et celle qui a[illegible]proche plus de la droite, est aussi la p[illegible] courte [illegible] donné occasion à Archimede [illegible] principe ou Axiome:

Premier Axiome.

VI. Si deux lignes sur le même plan ont les extremitez communes & sont courbes ou creuses vers la même part, celle qui est contenuë est plus courte que celle qui la contient. J'ay dit courbes ou creuses, car cela n'est pas seulement vrai des lignes courbes comme dans la 1.re figure mais aussi des droites comme dans la 2.de lors que deux ou plusieurs lignes droites se joignant font un creux. Car alors deux ou plusieurs lignes droites sont considerées comme une seule ligne courbe qui seroit creuse vers ce côte-là.

Mais il faut bien remarquer ces mots, (vers la même part) car cela ne seroit pas vray, si la même ligne courbe étoit creuse vers differens côtez comme dans la 3.e figure: ou si diverses lignes droites considerées comme une seule ligne faisoient aussi des creux de differens côtez comme dans la 4e. figure; car alors la contenante pourroit être plus courte que la contenuë.

Second Axiome ou Demande.

VII. Ayant deux points donnez on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Et

Et on n'y en peut mener qu'une.

Laquelle par consequent est l'unique & naturelle mesure de la distance entre ces deux points. L'instrument dont on se sert pour cela s'appelle *regle.*

TROISIÉME AXIOME OU DEMANDE.

LA simplicité de la ligne droite fait qu'en ayant une posée on la peut prolonger de part & d'autre jusques à l'infini, c'est à dire tant que l'on veut. VIII.

D'où il s'ensuit que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Ou, que connoissant deux points dans une ligne droite, nous la connoissons toute.

Ou, que deux points étant donnez de position, toute la ligne droite est donnée.

QUATRIÉME AXIOME.

SI une ligne droite est immediatement couchée sur une autre en une de ses parties, elle le sera en toutes, pourveu que l'une & l'autre soit prolongée autant qu'il faudra, & elles ne seront proprement qu'une même ligne. IX.

CINQUIÉME AXIOME.

DEUX lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point. X.

SIXIÉME AXIOME.

DEUX lignes droites qui étant prolongées vers un même côté s'approchent peu à peu, se couperont à la fin. XI.

Euclide prend cette proposition pour un principe & avec raison; car elle a assez de clarté pour s'en

contenter, & ce seroit perdre le temps inutilement que de se rompre la teste pour la prouver par un long circuit.

SECONDE SECTION. DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

DEFINITIONS.

XII. LA ligne que décrit sur un plan l'une des extrémitez d'une ligne droite, son autre extrémité demeurant immobile, s'appelle *circulaire*, ou *circonference.*

XIII. ET l'espace que décrit toute la ligne s'apelle *cercle.*

XIV. LE point immobile, *centre*, qui ne peut pas n'être point également distant de chaque point de la circonference, puisque c'est toûjours la même ligne qui a fait cette distance.

XV. ET ainsi il est bien clair que toutes les lignes du centre à la circonference sont égales.

XVI. CES lignes s'appellent *rayons* ou *demydiametres.*

XVII. LES lignes menées d'un point de la circonference à un autre s'appellent *cordes.*

XVIII. SI elles passent par le centre, elles s'appellent *diametres*, & elles coupent le cercle & la circonference en deux parties égales, qui s'appellent *demycercles* & *demycirconferences.*

XIX. LA partie de la circonference qui se trouve entre les extremitez d'une corde s'appelle *arc.* Mais lors que cette corde est moindre qu'un diametre, il y a deux portions de circonference qui se terminent aux extremitez de cette corde: l'une plus grande que la demy-

demycirconference, & l'autre plus petite. Or quand on parle de l'arc d'une corde, si on n'ajoûte autre chose, on entend celui qui n'est pas plus grand que la demycirconference ; [illegible] qui soit bien remarqué.

Toute circonfer[illegible] conçoit [illegible]isée en 360 parties égales qui s'appe[illegible]. XX.

Chaque degré en 60 minutes premieres qu'on appelle simplement *minutes* : Chaque minute en 60 *secondes*, & chaque seconde en 60 *troisiémes* ; & ainsi à l'infini. XXI.

Premier Axiome ou Demande.

On demande qu'ayant un intervalle donné, on puisse décrire une circonference de cét intervalle. Ce qu'on ne peut douter être possible, puis qu'il ne faut pour celà que concevoir que la ligne qui joindra les deux points de cét intervalle se remuë, l'une de ses extremitez demeurant immobile. XXII.

La machine la plus ordinaire dont on se sert pour la décrire sur le papier s'appelle, *compas*, qui a deux jambes, lesquelles étant ouvertes plus ou moins selon l'intervalle donné, l'une demeurant immobile, l'autre décrit la circonference.

Second Axiôme ou Demande.

Or comme il faut supposer dans cette operation que les deux jambes du compas gardent toûjours la même distance entr'elles, il n'est rien de plus facile aprés avoir mesuré la longueur d'une ligne donnée par l'ouverture du compas, que de se servir de cette même ouverture pour décrire ailleurs une ligne égale à celle-là, ou de retrancher d'une autre ligne une portion qui soit égale à cette premiére. C'est pourquoi on peut hardiment mettre ce Probléme entre les demandes qui n'ont pas besoin d'être prouvées: XXIII.

Décrire une ligne égale à une ligne donnée, soit par le retranchement d'une autre ligne, soit par-tout ailleurs.

TROISIÉME AXIOME.

XXIV. LA m[illegible] conçoit que se forme la ligne circulaire est si simple, qu'il est impossible de concevoir qu'elle ne soit pas par-tout dans une entiere uniformité. Et de là il s'ensuit que les Theorémes suivans sont naturellement connus :

Les circonferences qui sont décrites d'un égal intervalle sont égales.

Et celles qui sont décrites d'un plus petit intervalle sont plus petites.

Et d'un plus grand sont plus grandes.

QUATRIÉME AXIOME.

XXV. LES degrez de circonferences égales sont égaux, puis que ce sont aliquotes pareilles de grandeurs égales. Et par la même raison les degrez d'une petite circonference sont plus petits que les degrez d'une plus grande.

CINQUIÉME AXIOME.

XXVI. DANS un même cercle les cordes qui soûtiennent des arcs égaux sont égales, & les arcs qui sont soûtenus par des cordes égales sont égaux. C'est une suite évidemment necessaire de l'entiere uniformité de la circonference. Il ne faut que de l'attention pour en appercevoir la certitude.

Il en est de même dans deux cercles égaux que dans le même cercle.

SIXIE-

Sixiéme Axiome.

Toutes les lignes tirées du centre qui sont plus petites que les rayons du cercle, ont leur extremité au dedans du cercle ; [illegible] longues, elles l'ont au dehors ; si égales, dans la circonference même. XXVII.

Septiéme Axiome.

Lors qu'on a d'une ligne l'une des extremitez donnée de position, & sa longueur, son autre extremité doit être dans la circonference du cercle décrit par un intervalle de cette longueur donnée. XXVIII.

TROISIE'ME SECTION.

DES LIGNES DROITES PERPENDICULAIRES.

Definitions.

Nous avons déja dit qu'une ligne droite n'en peut couper une autre droite qu'en un point. Mais la coupant elle le peut faire en deux manieres. XXIX.

La premiere, est en ne penchant point plus vers un côté de la ligne coupée, que vers l'autre.

Et alors elles sont dites se couper *perpendiculairement*, & être *perpendiculaires* l'une à l'autre.

La seconde, en penchant plus vers un côté que vers l'autre, & alors elles sont dites se couper *obliquement*, & être *obliques* l'une au regard de l'autre.

Mais il ne faut pas confondre l'obliquité qui convient à une ligne droite par rapport à une autre ligne, avec la curvité qui convient à la ligne par sa nature même, & constituë une espece de ligne opposée à la ligne droite.

AVERTISSEMENT.

XXX. QUOI *que deux lignes qui se coupent, se coupent & soient coupées mutuellement : neanmoins afin qu'on* [illegible] *plus, nous appellerons l'une* coupée *& l'autre* coupante.

DEFINITION PLUS EXACTE
DE LA PERPENDICULAIRE.

XXXI. POUR former une notion plus distincte de deux lignes perpendiculaires, on les peut définir en cette sorte :

LORS que deux points de la ligne coupée étant pris également distans de l'un des points de la ligne coupante, tout autre point de la ligne coupante se trouvera aussi être également distant de ces deux points de la ligne coupée la ligne coupante est perpendiculaire à la coupée, étant bien clair qu'elle ne peut alors incliner plus d'un côté que de l'autre.

AXIOME.

XXXII. POUR montrer que tous les points de la ligne coupante sont également distans de deux de la ligne coupée, il suffit d'en avoir deux dans la ligne coupante dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Car de là il s'ensuivra que tous les autres le seront aussi.

JE *prétens que la seule consideration de la nature de la ligne droite fait voir la verité de cette proposition, & que sans cela il est impossible de garder dans la Geometrie l'ordre naturel des choses.*

Car

Car 1. *puisque la position de la ligne droite ne dépend que de deux points, & qu'en ayant donné deux points elle est toute donnée, c'est à dire que la position de tous les autres points est determinée : il est visible que la position de ces deux points de la ligne coupante, dont on suppose que* [illegible] *distant de deux points de la ligne coupée, détermine tous les autres à en être aussi également distans.*

2. *S'il y en avoit quelqu'un qui approchât plus de l'un des points que de l'autre, la ligne seroit necessairement courbée de ce côté-là.*

3. *Il n'y auroit point de raison pourquoy il s'approcheroit plûtost d'un côté que de l'autre, ny pourquoy il s'approcheroit de tant, plûtost que de tant. Car la position de ces deux points donnez qui determine tous les autres points de la ligne, ne les peut determiner qu'à une égalité de distance, puis qu'ils n'ont pour eux mêmes que cette determination-là.*

4. *Tous les Geometres semblent assez convenir de l'évidence de cette proposition, puisque dans la solution de tous les problemes qui regardent les perpendiculaires, ils ne font autre chose que chercher deux points dans la ligne coupante, dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Et ainsi quelque circuit qu'ils cherchent pour montrer que leur probleme est resolu par là : il est clair neanmoins que dans la nature des choses ce n'est que cela seul qui l'a resolu.*

5. *Quoy qu'il en soit, je soûtiens que quiconque voudra agir de bonne foy reconnoîtra que considerant les choses avec attention, il lui est impossible de concevoir que cela puisse être autrement ; & qu'il repugne à l'idée que nous avons naturellement de la ligne droite, que deux de ses points étant posez directement, comme nous avons dit, sur une autre ligne : quelqu'un des autres s'écarte ou à droit ou à gauche, & s'approche ainsi plus prés de l'un des côtez de la ligne.*

Or il me semble trés inutile de chercher bien-loin & par de longs détours des preuves d'une chose dont il nous est impossible de douter, pour peu que nous y veuillions faire attention.

6. Ce qui doit faire rejetter le scrupule qu'on pourroit avoir [...] proposition comme claire d elle-même, c est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses, & employer des triangles pour demontrer les proprietez des lignes; c'est à dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à la veritable methode.

Soit donc de justice ou de grace, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition, qui donne un moyen trés facile de demontrer les Problemes suivans sans se servir des triangles, comme fait Euclide.

PREMIER PROBLEME.

XXXIII. D'UN point donné hors une ligne donnée tirer une perpendiculaire sur cette ligne : on suppose que cette ligne soit prolongée s'il en est besoin, & que le point donné ne se puisse pas rencontrer dans la ligne prolongée, car alors il ne seroit pas proprement hors cette ligne.

Soit le point K, & la ligne Z. De K pris pour centre e décrire un cercle qui coupe Z, & par consequent y marque deux points comme M & N, également distans de K, puisque MK, & NK seront rayons du même cercle. Cela fait, décrivant deux cercles égaux d'*m* & d'*n* qui s'entrecoupent partout ailleurs qu'en K, comme en B : la ligne qui joindra B & K. sera perpendiculaire à la ligne Z, ce qu'il falloit faire. Car K & B sont chacun également distans de deux points de Z, *m* & *n*, & par



con-

consequent tous les autres en seront aussi également distans par la precedente, & ainsi la ligne sera perpendiculaire par la definition.

SECOND PROBLÊME.

D'UN point donné dans une ligne élever une perpendiculaire. Soit le point K dans la ligne Z, qui étant pris pour centre, le cercle que l'on décrira de ce centre coupera la ligne Z, prolongée s'il en est besoin, en deux points comme M & N, qui seront également distans de K. Donc l'intersection de deux cercles égaux qui auront M & N pour centres donnera le point B, auquel il faudra mener la ligne du point K pour faire la perpendiculaire que l'on cherche. XXXIV.

C'est la même preuve que du Problême precedent ; car K & B seront chacun également distans d'M & N.

TROISIÉME PROBLÉME.

COUPER une ligne donnée en deux parties égales. Soit la ligne donnée *m n*. En tirant des deux extremitez *m* & *n*, prises pour centres, deux cercles égaux qui s'entrecoupent en deux points comme k & *b* : ou tirant des mêmes centres deux arcs de cercles égaux qui s'entrecoupent en un point comme en *k*, & deux autres arcs de cercles égaux ou inégaux aux premiers, mais égaux entr'eux, qui s'en- XXXV.

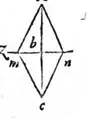
 tre-

trecoupent aussi en un autre point comme en *b*: la ligne *k b* prolongée autant qu'il sera besoin coupera la ligne *m n* en deux parties égales. Car si le point de la sect... est z : comme il est dans la lign... *b k*, qui est perpend... *n*, parce que *b* & *k* sont également distans d'*m* & *n* : *z* aussi en sera également distant, & par consequent *m z* sera égale à *z n*. Ce qu'il falloit demontrer.

I. Theoréme.

XXXVI. La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qui puissent estre menées d'un point à une ligne.

Soit le point K & la ligne Z, sur laquelle ayant mené de K la perpendiculaire K *b*, & l'ayant prolongée jusques en *c*, en faisant *b c* égale à K *b*: si on tire de K d'autres lignes sur la ligne *Z*, comme en *m* & *n*, je dis que K *b* est plus courte que K *m*, ou K *n*. Car ayant tiré les lignes *m c* & *n c*, je dis que K *m* est égale à *m c*, & K *n* à *n c*; puisque la ligne *Z* étant perpendiculaire à la ligne K *c*, le point *b* qui est commun à ces deux lignes ne peut étre, comme il est, également distant de K & de *c*, que les autres points comme *m* & *n* ne soient aussi chacun également distans de K & de *c*.



Or cela étant, il est clair que la ligne K *b c* étant droite est plus courte que les lignes K *m c*, qui ne font pas une ligne droite; & par consequent K *b*, qui est la moitié de K *b c*, est plus courte que K *m*, qui est la moitié de K *m c*.

II. Theo-

II. Theoréme.

On ne peut élever du même point d'une ligne plus d'une perpendiculaire, [illegible] en mener plus d'une d[illegible] à une ligne. Le premier est cla[illegible] soi-même; car ayant élevé du milieu de la ligne *m n* la perpendiculaire *b* K, il est visible que si on en vouloit élever une autre du même point *b*, on ne la pourroit tirer que plus vers un côté que vers l'autre, ce qui est directement contraire à la notion de perpendiculaire. XXXVII.

La 2.de partie est encore trés manifeste, & se peut neanmoins prouver de cette sorte: Soit menée de K sur *m n* la perpendiculaire K B, en sorte que B soit également distant d'*m* & *n*, dont par conséquent K doit être aussi également distant: si on menoit de K une autre perpendiculaire à un autre point comme à *g*, il faudroit que *g* fût également distant d'*m* & d'*n*, puisque k qui seroit un des points de cette ligne en est également distant. Or cela est impossible, puisque si *g* étoit entre B & *m*, il seroit plus prés d'*m* que d'*n*; & s'il étoit entre B & *n*, il seroit plus prés d'*n* que d'*m*.

I. Corollaire.

La perpendiculaire est la mesure de la distance d'un point hors d'une ligne à cette ligne, & de la ligne à ce point. XXXVIII.

Car étant unique & la plus courte de toutes les lignes qui peuvent être menées d'un point à une ligne,

ligne, on n'en pourroit prendre aucune autre qui fût si propre à mesurer cette distance.

II. Corollaire.

XXXIX. Deux [illegible] étant perpendiculaires à une même ligne, il est impossible qu'elles se rencontrent, quoi que prolongées à l'infini.

Car si elles se rencontroient, elles auroient un point commun, & ainsi il y auroit deux lignes menées d'un même point qui seroient perpendiculaires à une même ligne, ce qu'on a fait voir être impossible, 37. *Sup.*

III. Corollaire.

XL. Lors que d'un point hors une ligne on a tiré une oblique sur cette ligne, si du même point on tire une perpendiculaire sur la même ligne, cette perpendiculaire tombera du côté que l'oblique est inclinée sur cette ligne.

Soit la ligne *b* C, & le point k dont ait été tirée l'oblique k *g*, qui soit inclinée vers *b*: je dis qu'il est clair par ce qui a été dit de la perpendiculaire, que si du même point k on en tire une sur *b* C, elle tombera entre *b* & *g*, & non pas entre *g* & C; car il est visible que si elle tomboit entre *g* & C, tant s'en faut qu'elle fût perpendiculaire, qu'elle seroit encore plus oblique que k *g*.

De plus ayant pris dans la ligne *b* C deux points également distans de k, comme pourroient être *b* & C: le point où tombera la perpendiculaire doit être également distant de ces deux points *b* C, (32.S.) & au contraire celui où tombe l'obli-

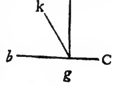
que

que doit être plus éloigné du point vers lequel elle est inclinée ; & par conséquent la perpendiculaire doit tomber du côté vers lequel cette ligne est inclinée.

IV. COROLLAIRE.

Si d'un point où une oblique coupe une ligne on veut élever une perpendiculaire sur cette ligne, elle s'élevera du côté vers lequel cette oblique n'est pas inclinée. XLI.

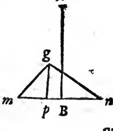
Soit la ligne *b* C coupée par l'oblique *k g* inclinée vers *b*. Si du point *g* on veut élever une perpendiculaire sur *b* C, elle s'élevera du côté de C, & non du côté de *b* ; c'est à dire qu'elle se trouvera entre les lignes *k g* & *g c*, & non pas entre *k g* & *g b*. Car il est visible que si elle se trouvoit entre *k g* & *g b*, elle seroit encore plus inclinée que *k g*.



III. THEORÉME.

La perpendiculaire indefinie qui coupe par la moitié la distance de deux points comprend tous les points du même plan, dont chacun peut être également distant de ces deux points. XLII.

Soient les points *m* & *n* joints par la ligne *m n*, & la perpendiculaire indefinie *k* B, qui la coupe par la moitié au point B. Il est clair que tous les points de la ligne *k* B sont également distans d'*m* & d'*n*. Mais je dis de plus, qu'il n'y en peut avoir aucun autre hors cette ligne



qui

qui en soit également distant. Car il faudra qu'il soit à l'un des côtez comme seroit *g*, d'où tirant une perpendiculaire sur *mn* (par 33. S.) elle la coupera en un autre point que B, comme seroit *p*. Or si *g* étoit également distant d'*m* & d'*n*, il faudroit que *p*, qui seroit un point de la perpendiculaire, [illegible]ment distant, ce qui est visiblement impossible, comme on l'a déja veu.

QUATRIE'ME SECTION.

DES LIGNES DROITES OBLIQUES.

Explication de la maniere dont on doit considerer les Lignes obliques pour les mieux comprendre.

XLIII. Nous avons déja dit que lors qu'une ligne droite en coupe une autre en penchant plus d'un côté que de l'autre, elle s'appelle oblique au regard de cette ligne qu'elle coupe obliquement.

Mais pour mieux juger de la grandeur de ces obliques en les comparant les unes aux autres, il est bon de ne les considerer que selon le côté selon lequel elles approchent plus de la ligne qu'elles coupent, qui est aussi la façon la plus naturelle de considerer ces lignes.

De plus, nous ne regarderons les obliques que comme menées d'un certain point à la ligne qu'elles coupent, & comme terminées à cette ligne.

Cela étant supposé, ce que j'entens par l'obliquité d'une ligne sur une autre, est que cette ligne soit plus couchée sur la ligne qu'elle coupe, que ne feroit la perpendiculaire menée du même point sur la même ligne. De sorte que c'est toûjours par rapport à cette perpendiculaire que je considere cette obliquité.

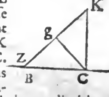
Mais

Mais ce rapport renferme deux choses. 1. La distance du point qui est commun à l'oblique & à la perpendiculaire d'avec le point de la ligne où la perpendiculaire tombe, qui est la même chose que la longueur de cette perpendiculaire.

2. La distance du po[illegible]lique tombe d'avec celui où tombe la perp[illegible]que j'appelle l'éloignement du perpendicule.

A quoi il faut ajoûter la distance du point d'où l'oblique est menée d'avec celui où elle coupe la ligne au regard de laquelle elle est appellée oblique: qui est la même chose que la longueur de cette oblique.

Soit par exemple la ligne Z indefinie, sur laquelle on fasse descendre du point K au point B l'oblique K B, & que de K on tire la perpendiculaire K C. Les trois distances dont nous venons de parler font trois lignes; dont deux (sçavoir la perpendiculaire K C, & l'éloignement du perpendicule B C) se coupent perpendiculairement, & la troisiéme, qui est l'oblique K B, rencontre obliquement l'une & l'autre.



Et ainsi cette oblique peut être considerée tantôt comme l'oblique de l'une, tantôt comme l'oblique de l'autre. Mais alors il faudra changer alternativement aux deux autres lignes les noms de perpendiculaire & d'éloignement du perpendicule. Car si je considere K B comme oblique sur B C: K C est la perpendiculaire, & B C l'éloignement du perpendicule. Et au contraire si je considere K B comme oblique sur K C: B C sera la perpendiculaire, & K C l'éloignement du perpendicule.

On pourroit aussi considerer B C & K C comme obliques sur K B, (car comme les lignes sont mu-

mutuellement perpendiculaires, elles sont aussi mutuellement obliques.) Mais pour suivre nôtre methode, il faudroit alors mener une perpendiculaire du point C à la ligne [illegible] -me seroit C g. [illegible] en considerant B C comme oblique sur la ligne B K ; la perpendiculaire seroit C g, & l'éloignement du perpendicule seroit g B. Mais à moins que de faire cela, K B seule est considerée comme oblique, tantôt au regard de l'une, tantôt au regard de l'autre.

La consideration de ces trois lignes, K B oblique, K C perpendiculaire, B C éloignement du perpendicule, nous fera comprendre plusieurs choses des lignes obliques qui n'ont pû encore être expliquées que par des triangles, ce qui est un ordre tout renversé. Et nous verrons d'une part que dans la comparaison des obliques l'égalité en deux de ces lignes donne l'égalité dans la troisiéme ; & nous examinerons de l'autre quand il n'y a égalité que dans une, quelle est l'inégalité des deux autres.

PROPOSITION FONDAMENTALE

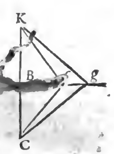
DE LA MESURE DES LIGNES OBLIQUES.

XLIV. Les lignes obliques menées du même point à une même ligne sont plus longues, plus elles sont éloignées du perpendicule.

Soient du point K menées sur la ligne Z la perpendiculaire K B, & les obliques K f & K g. Et soit prolongée K B jusques en C, en sorte que B C soit égale à K B. Et soient aussi menées les

lignes

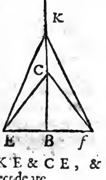
lignes *f* C & *g* C : je dis premierement que Z étant perpendiculaire à K B, comme le point B, qui est commun à l'une & à l'autre est également distant de K & C les points *f* & *g* sont aussi également distans de K & de C. Donc K *f* est égale à *f* C, & K *g* à *g* C. Or par la maxime d'Archimede K *f* C est plus courte que K *g* C. Donc K *f*, qui est la moitié de K *f* C, est plus courte que K *g*, qui est la moitié de K *g* C. Ce qu'il falloit demontrer.



COROLLAIRE.

IL est visible que ce n'est que la même chose si l'on dit que de toutes les obliques qui seront menées au même point d'une même ligne de divers points d'une perpendiculaire à cette ligne pris du même côté, celles qui sont menées des points plus proches de la ligne où tombe l'oblique sont les plus courtes. XLV.

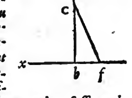
Car il ne faudra alors que tirer d'autres lignes des mêmes points de cette perpendiculaire vers un même point de l'autre côté de la ligne qui coupe cette perpendiculaire également distant de cette perpendiculaire. Si je veux montrer, par exemple, que la ligne K *f* est plus longue que C *f*, je n'ay qu'à prendre le point E autant distant de B, qu' *f* est aussi distant de B, & tirer les lignes K E & C E, & faire ensuite la demonstration precedente.



AVER-

AVERTISSEMENT.

XLVI. *C'EST la même chose pour juger de la grandeur de deux lignes obliques de les considerer comme menées du même point [illegible] même ligne, ou comme menées [illegible] points differens sur la même ligne, ou deux differentes lignes : pourveu que l'on suppose que chaque point est également distant de la ligne à laquelle on mene l'oblique. Car il est visible qu'il n'y a que cette distance qui y fasse quelque chose.*



Il est vrai qu'il faut supposer pour cela que si l'on a d'une part la ligne x, *& de l'autre la ligne* Z, *& qu'on éleve d'un point de chacune, comme de* b *&* d'm, *une perpendiculaire, & que dans chaque perpendiculaire on prenne un point comme* c *&* n, *qui soit de part & d'autre également distant du point de la section* b *&* m ; *& qu'on prenne aussi dans chaque coupée* x *&* Z *un point comme* f *&* p, *également distant de part & d'autre du même point de la section* b *&* m: *les obliques* c f *&* n p *sont égales.*

Z n m p

Mais la verité de cette supposition est naturellement connuë, & si on la peut contester de paroles, comme les Pyrrhoniens ont fait voir qu'il n'y a rien qu'on ne puisse contester en cette maniere : il est certain au moins qu'il est impossible à tout esprit raisonnable d'en avoir interieurement le moindre doute, ce qui est la plus grande certitude qu'on doive desirer dans les sciences.

Neanmoins si on en veut être convaincu par une preuve

preuve grossiere & materielle, on peut se servir de celle dont Euclide *prouve que deux angles étant égaux, & ayant les côtez égaux aux côtez, la baze est égale à la baze ; qui est qu'il fait mettre ces angles l'un sur l'autre, en sorte que les extrémitez des côtez se trouvent ensemble ; d'où il* [illegible] *bazes sont aussi couchées l'une sur l'autre, ce qu'on appelle en Latin* congruere, *& par consequent égales. Car on peut de mêmes icy s'imaginer que la ligne* z *est couchée sur la ligne* x, *en sorte que le point* m *est immediatement sur le point* b, *& la perpendiculaire sur la perpendiculaire : D'où il arrivera necessairement que le point* n *sera sur le point* c, *& le point* p *sur le point* f, *& qu'ainsi les obliques* n p *&* c f *seront couchées l'une sur l'autre, & ainsi entierement égales.*

Voilà ce qui peut satisfaire ceux qui aiment mieux se servir dans la connoissance des choses de leur imagination que de leur intelligence : ce que je trouve fort mauvais, parce que l'Esprit se rend par là incapable de bien comprendre les choses spirituelles, s'accoûtumant à ne recevoir pour vray que ce qu'il peut concevoir par des phantômes & des images corporelles : au lieu qu'il y a beaucoup de choses que nous sçavons trés certainement, sans que nous les puissions concevoir par l'imagination ; comme quand je dis, Je pense, donc je suis : *nul phantôme ou image corporelle ne me peut servir à me faire concevoir ce que j'entens par ces mots,* je pense, je suis.

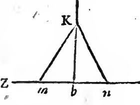
Egalité dans les Lignes obliques.

Cette seule proposition avec son corollaire & l'avertissement nous donne moyen de prouver facilement plusieurs theorémes touchant les lignes obliques. Et voici premiérement ceux de l'égalité : XLVII.

I. Theo-

I. Theoréme.

XLVIII. Des trois lignes que nous avons dit se devoir considerer dans les lignes obliques, la perpendiculaire, l'éloignement du perpendicule, & l'oblique même : deux ne peuvent être égales que la troisiéme ne le soit aussi. Ainsi 1. s'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques sont égales.



Soient du point K de la ligne K *b*, qui coupe perpendiculairement la ligne Z en *b*, menées les deux obliques K *m* & K *n*. La perpendiculaire étant la même, & par consequent égale à soi-même : si *b m*, qui est l'éloignement du perpendicule de l'oblique K *m*, est égal à *b n*, qui est l'éloignement du perpendicule de l'oblique K *n* : K *m* & K *n* seront égales. Car les points *m* & *n* ne peuvent être également dinstans de *b*, l'un des points de la perpendiculaire K *b*, qu'ils ne soient aussi également distans de tout autre point de cette perpendiculaire, & par consequent de K. Donc K *m* est égale à K *n*.

I. Corollaire.

XLIX. On ne peut mener d'un point à une ligne que deux lignes égales. Car on n'en peut mener qu'une seule perpendiculaire. Et pour les obliques, elles ne peuvent être égales que les deux points où elles coupent cette ligne ne soient également distans du point où tombe la perpendiculaire. Or il ne peut y avoir que deux points, l'un d'un côté & l'autre de l'autre, qui soient également distans de ce point.

Car

Car tout autre en sera, ou plus proche ou plus éloigné, comme il est évident. Donc, &c.

II. Corollaire.

Il est impossible qu'un même point soit également distant de trois points d[illegible]. I.

C'est la même chose que la precedente differemment énoncée.

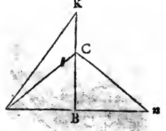
II. Theoréme.

S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule. II.

Soit fait comme devant. Si K *m* est égale à K *n*, B *m* sera égale à B *n*. Car si *m* étoit plus éloignée de B que n'est *n*, l'oblique K *m* seroit plus éloignée de la perpendiculaire, & par consequent plus longue par la proposition principale ; ce qui est contre l'Hypothese.

III. Theoréme.

S'il y a égalité dans l'oblique & dans l'éloignement du perpendicule, il y en a dans la perpendiculaire. III.



Car si la perpendiculaire de l'une étoit plus grande que la perpendiculaire de l'autre, c'est comme si des deux obliques qui se terminent en *m* & *n* l'une descendoit du point k de la perpendiculaire k B, & l'autre du point C plus bas que k de cette même

me perpendiculaire k B, de sorte que l'une seroit k *m*, & l'autre c *n*.

Or si cela étoit, c *n* seroit plus petite que k *m*, par 44. & 45. *sup.* ce qui est contre l'hypothese.

IV. THEORÉME.

LIII. QUAND il n'y a égalité donnée que dans l'une de ces trois lignes, voici ce qui est des deux autres:

1. S'il n'y a égalité que dans la perpendiculaire, le plus grand éloignement du perpendicule donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique donne le plus grand éloignement du perpendicule. C'est ce qui a été prouvé dans la proposition principale.

V. THEORÉME.

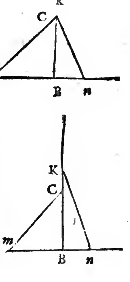
LIV. 2. S'IL n'y a égalité que dans l'éloignement du perpendicule, la plus grande perpendiculaire donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique la plus grande perpendiculaire; & alors la plus grande oblique est la moins oblique.

Il y a deux parties, dont la premiere a été prouvée par le Corollaire de la proposition fondamentale; & pour l'autre, elle en est une suite évidente. Car si deux obliques se terminent au même point d'une ligne comme K *m*, & c *m*, & qu'elles soient menées de deux points differens de la même perpendiculaire, comme de K & de c: il est clair que c *m* est plus couchée sur *m* B que k *m*. Or c'est la même chose,

chose, si ayant pris *n* autant distant de B que l est *m*, on tire C *n* au lieu de C *m*.

VI. Theoréme.

S'il n'y a égalité que dans la longueur des obliques, le plus grand éloignement du perpendicule donnera une moindre perpendiculaire, & une moindre perpendiculaire donnera un plus grand éloignement du perpendicule. Cela est clair par les Theorémes precedens. LV.



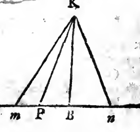
Car soit la perpendiculaire k B sur la ligne *m n*. Si on tire l'oblique C *m*, & qu'on prenne un autre point plus prés de B, comme *n* : il est visible que C *n* seroit plus courte que C *m* par le 4.e Theoréme ; & par consequent afin qu'on méne à *n* de quelque point de la ligne K B une oblique égale à C *m*, il faudra la tirer d'un point plus éloigné de B que n'est C, comme de K.

Avertissement.

Je ne dis rien de la diverse obliquité que la même ligne a sur les deux lignes qui peuvent être reciproquement considerées comme sa perpendiculaire & son éloignement du perpendicule, comme C m *sur* B C *& sur* B m*: car cela est trop facile à juger par ce qui est dit.* LVI.

VII. Theoréme.

LVII. Lors que deux lignes obliques sont menées d'un même point sur une même ligne, la distance des deux points de section est égale à la distance du perpendicule de l'une plus ou moins la distance du perpendicule de l'autre. *Plus*, si les lignes sont inclinées de different côté; *moins*, si elles sont inclinées du même côté.



Soient menées du point K sur la ligne *z* les deux obliques K*m* & K*n*, inclinées de different côté, & une autre comme K*P*, inclinée du même côté que K*m*. Il est visible que la perpendiculaire KB se trouvera entre K*m* & K*n*, mais au delà de K*m* & de K*P* : & ainsi la distance entre les points de section *m* & *n* sera égale à l'éloignement du perpendicule de K*m*, qui est *m*B, plus l'éloignement du perpendicule de K*n*, qui est B*n*.

Mais si on considere K*m*, & K*P*, inclinées du même côté: il est visible que la distance d'*m* & *P*, points de section de ces deux obliques, est moindre que l'éloignement du perpendicule de K*m*, qui est *m*B, de la longueur de *P*B, qui est l'éloignement du perpendicule de l'autre oblique K*P*.

VIII. Theoréme.

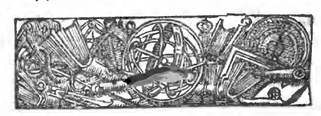
LVIII. Deux lignes obliques inégales entr'elles & inclinées de different côté étant menées du même point sur la même ligne: & deux autres obliques, dont chacune est égale à chacune des deux premieres, étant aussi menées d'un autre point sur une même

même ligne, & y étant aussi inclinées de different côté : si la distance des points de section des deux premieres obliques est égale à la distance des points de section des deux dernieres, les deux points dont elles sont menées sont également distans de la ligne à laquelle elles sont menées.

Soient sur la ligne *X* menées du point K les deux obliques K *b* & K *d*, & du point *b* deux autres obliques *b p* & *b q*, ensorte que K *b* soit égale à *b p*, & K *d* à *b q*, & que les points *b* & *d* soient autant distans que le sont *p* & *q* ; je dis que les points K & *b* sont également distans de la ligne X ; ou, ce qui est la même chose, que les perpendiculaires menées de ces deux points sont égales.

Car la distance des points *b* & *d* ne peut être égale à la distance des points *p* & *q*, que les éloignemens du perpendicule de K *b* & K *d* pris ensemble ne soient égaux à ceux de *b p* & *b q* pris ensemble : ce qui ne seroit pas si K étoit plus éloigné d'*X* que *b*. Car alors K *b* étant égale à *b p* auroit son éloignement du perpendicule plus petit que ne l'auroit *b p*, puis qu'elle descendroit d'un point plus éloigné que ne descend *b p*, (par 55. sup.) de mêmes K *d* auroit son éloignement du perpendicule plus petit que *b q* ; Et ainsi les deux éloignemens du perpendicule de K *b* & de K *d* pris ensemble seroient plus petits que ceux de *b p* & *b q* pris ensemble.





NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SIXIE'ME.

DES LIGNES PARALLE'LES.

1. *A*PRES *avoir parlé des lignes droites qui se rencontrent, soit perpendiculairement, soit obliquement, on peut considerer dans les lignes une autre proprieté toute opposée, qui est de ne se rencontrer jamais, & d'être toûjours également distantes l'une de l'autre, & c'est ce qu'on appelle des lignes paralleles.*

DEUX

DEUX NOTIONS DES LIGNES PARALLELES,

L'une Negative, et l'autre Positive.

Mais ces lignes peuvent être considerées selon deux notions differentes, l'une negative & l'autre positive. II.

La negative est de ne se rencontrer jamais, quoique prolongées à l'infini.

La positive, d'être toûjours également distantes l'une de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points de chacune sont également distans de l'autre; c'est à dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne, sont égales. Et il est bien clair que la notion negative est une suite necessaire de la positive, ne se pouvant pas faire que deux lignes se rencontrent si elles demeurent toûjours également distantes l'une de l'autre.

C'est pourquoi c'est avoir tout fait que d'avoir trouvé des marques certaines par lesquelles on puisse reconnoître que deux lignes sont paralleles selon la notion positive, c'est à dire qu'elles soient tellement disposées, que les points de chacune soient également distans de l'autre; ce qui suppose toûjours qu'elles soient prolongées autant qu'il est necessaire, afin que des points de l'une on puisse tirer des perpendiculaires sur l'autre.

C'est ce que nous trouverons facilement aprés avoir établi quelques Lemmes.

AVERTISSEMENT

POUR LES LEMMES SUIVANS.

III. *Lors que dans les Lemmes suivans je compare diverses lignes qui coupent les deux mêmes, je suppose toûjours deux choses:*

L'une, que ces coupées, dont l'une sera toûjours nommée x *& l'autre* z, *ou ne se joignent point, ou se joignent simplement sans se traverser : c'est à dire qu'on les considere toûjours comme n'ayant point changé de côté l'une au regard de l'autre.*

L'autre, que ces coupantes soient enfermées entre les coupées, & c'est aussi ce que j'entens dans tout ce Livre quand je parle des lignes entre paralleles.

I. LEMME.

IV. QUAND les deux lignes x & Z sont coupées par b C perpendiculaire sur x & oblique sur Z, il arrive trois choses:

b Z K C x

1. Que toutes les autres lignes menées de Z perpendiculairement sur x, sont obliques sur Z.

2. Qu'elles sont inclinées sur Z du même côté que C b l'est aussi sur Z, lequel côté j'appellerai K.

3. Que les perpendiculaires sur Z sont obliques sur x, & inclinées sur x du même côté que C b l'est sur Z, c'est à dire vers K.

Les deux premieres parties se prouvent ensemble, & la preuve de ces deux premieres emporte celle de la 3.e

PREU-

Preuve des deux premieres Parties.

Soient pris deux points *f* & *p* sur la ligne Z, aux deux cotez de *b*, d'où soient menées *fg* & *pq* perpendiculairement sur la ligne *x*; il faut prouver qu'elles seront obliques sur Z, & inclinées vers K.

Soit tirée de c une perpendiculaire sur Z; elle sera vers K, & non pas vers *p*, par V. 40. Et ainsi le point où cette perpendiculaire tombera sur Z sera
ou le même point que *f*.
ou au delà de *f*.
ou entre *f* & *b*.

1.er Cas. Si c'est le même point que *f*: *cf* étant perpendiculaire sur la ligne Z, *gf* sera oblique sur Z, & inclinée vers K.

2.d Cas. Si ce point est au delà d'*f*, comme en *d*, alors *cd* coupera *fg*. Que ce soit en *a*. Donc *ad* étant perpendiculaire sur Z, *af* (qui est la même chose que *gf*) sera oblique sur Z, & inclinée vers *ad*, & par consequent vers K.

3.e Cas. Si *d* est entre *f* & *b*: de *d* menant *db* perpendiculaire sur *x*, & de *b*, *bl* perpendiculaire sur Z; si *bl* se termine ou à *f*, ou au delà de *f*, on prouvera de la même sorte que dans le

le premier & dans le second Cas, que *g f* est oblique sur Z, & inclinée vers k.

Et si *b l* n'alloit pas jusques à *f*, on tireroit encore d'*l*, *l m* perpendiculaire sur *x* & d'*m* une perpendiculaire sur Z, jusques à ce qu'il y en ait une qui se termine à *f*, ou au de là d'*f*.

On prouve de la même sorte que *q p* est oblique sur Z, & inclinée vers K; excepté qu'on élevera de *b* une perpendiculaire sur la ligne Z, qui coupera la ligne *x* au delà de c, par V. 41. Et ainsi tombera ou à *q*. ou au delà de *q*. ou entre c & *q*.

Ainsi en l'une ou l'autre de ces trois manieres; on prouvera que *p q* est oblique & inclinée vers K, comme on l'a prouvé d'*f g*.

Preuve de la troisiéme Partie.

Elle est comprise dans la preuve des deux premieres, étant clair que toutes les lignes qui ont été perpendiculaires sur Z, ont été obliques sur *x*, & inclinées vers K.

II. Lemme.

V. Si les lignes *x* & Z sont coupées par *b c*, perpendiculaire sur *x*, & oblique sur Z, & inclinée vers K: toutes les lignes menées des points de Z perpendiculairement

ment sur *x*, seront inégales; & les plus courtes seront celles qui seront vers K, c'est à dire vers le côté ou la ligne *b c* est inclinée.

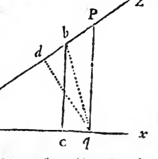
Il suffira de prouver que *b c* étant plus vers K que *p q*, sera necessairement plus courte que *p q*.

Soit menée de *q*, une perpendiculaire sur Z; le point où cette perpendiculaire tombera, sera, ou le même point que *b*.
ou au delà du point *b*.
ou entre *b* & *p*.

1.er Cas. Si c'est le même point que *b*: *b c* étant perpendiculaire sur *x*, & *b q* oblique, *b c* sera plus courte que *b q*, (V. 36.) Or par la même raison *q b* étant perpendiculaire sur Z, & *p q* oblique, *q b* est plus courte que *q p*.

Donc si *b* c est plus courte que *q b*, & *q b* plus courte que *p q*: *b* c doit être plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demontrer.

2.d Cas. Si ce point est au delà de *b*, comme en *d*: en tirant *q b*, *q b* sera oblique, mais plus proche de la perpendiculaire *q d*, que *p q*, & par consequent plus courte que *p q*. (V. 44.) Or *b* c est plus courte que *q b*, (V. 36) Donc *b* c est à plus forte raison plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demontrer.



3.e Cas. Si *d* se trouve entre *b* & *p*: de *d* on tire-

ra *d f* perpendiculaire sur *x*, & d'*f*, *f g* perpendiculaire sur Z, & *g* se trouvant ou au point *b*, ou au delà du point *b*, on prouvera comme dans le premier & le second cas que *b* c est plus courte que *d f*, laquelle par le premier cas est plus courte que *p q*, & par consequent *b* c est plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demontrer.

Que si *f g* n'alloit pas jusques à *b*, on tireroit d'autres perpendiculaires sur *x*, & puis sur Z, jusques à ce qu'il y en eût une qui allât jusques à *b*, ou au delà.

Donc de tous les points de Z les perpendiculaires sur *x* sont inégales, & par consequent tous les point de Z sont inégalement distans de *x*, lors qu'une même ligne est perpendiculaire sur *x*, & oblique sur Z.

Corollaire.

VI. C'est visiblement la même chose de toutes les lignes perpendiculaires à Z, & obliques sur *x*, comparées ensemble.

III. Lemme.

VII. En comparant une perpendiculaire sur *x*, & oblique sur *z*, avec une perpendiculaire sur *z* & oblique sur *x*: si elles ne se croisent point, mais qu'elles soient toutes separées, elles sont necessairement inégales, & la plus courte est celle qui est plus vers le côté vers lequel elles sont inclinées.

Soient *f g* perpendiculaire sur *z*, & oblique sur *x*, & *p q* perpendiculaire sur *x*, & oblique sur *z*, & que

que leur inclination soit vers k ; je dis que $f\,g$, qui est plus vers k, est la plus courte.

Car en élevant de g, $g\,h$ perpendiculaire sur x. & oblique sur z : par le Lemme precedent $g\,h$ sera plus courte que $p\,q$; or $g\,f$ étant perpendiculaire sur z, elle est plus courte que $g\,h$, qui est oblique sur la même z ; & par consequent $f\,g$ est plus courte que $p\,q$.

IV. Lemme.

Deux lignes enfermées ne se croisant point, ne sçauroient être égales, & être chacune perpendiculaire sur quelqu'une des enfermantes, qu'elles ne le soient sur toutes les deux. VIII.

Car si l'une étoit perpendiculaire sur x, & oblique sur z, elle seroit inégale à l'autre, ou par le second Lemme, si l'autre étoit aussi perpendiculaire sur x : ou par le troisiéme, si l'autre étoit perpendiculaire sur Z. Il faut donc pour être égales qu'elles soient perpendiculaires sur l'une & sur l'autre des enfermantes.

V. Lemme.

Si une ligne enfermée est perpendiculaire à l'une & à l'autre des enfermantes, toutes les lignes menées de quelque point que ce soit d'une enfermante perpendiculairement sur l'autre seront égales à cette enfermée, & par consequent entr'elles. IX.

 Soit

Soit bf enfermée entre les lignes z & x, & perpendiculaire à l'une & à l'autre: & de c point quelconque de Z soit menée c g perpendiculaire sur x; bf & c g seront égales, si on ne peut rien retrancher de bf, ni y rien ajoûter, que bf & c g ne soient inégales. Or cela est clair.

Car si de p, point quelconque au dessous de b dans bf, on tire p c, cette ligne p c coupera obliquement bf, puisque par l'hypothese c b (partie de Z) coupe perpendiculairement bf, & que d'un même point on ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire à la même ligne.

Donc par le second Lemme pf (c'est à dire bf retranchée de quelque chose) & c g sont inégales.

Ce sera la même chose si on allongeoit bf de quoi que ce fût. Car si du point b au dessus de b, bf étant prolongée, on tiroit b c, cette ligne par la même raison couperoit obliquement bf prolongée.

Donc par le second Lemme bf prolongée seroit encore inégale à c g.

Donc on ne sçauroit rien retrancher de bf, ni y rien ajoûter, que bf & c g ne soient inégales.

Donc elles sont égales.

VI. Lemme.

2. Si une ligne est perpendiculaire à deux lignes, toutes les lignes perpendiculaires à l'une de ces lignes seront perpendiculaires à toutes les deux.

Car s'il y en avoit une seule qui fût perpendiculaire sur l'une & oblique sur l'autre, il s'ensuivroit par le premier Lemme que toutes les autres lignes perpendiculaires à l'une de ces deux lignes seroient obliques sur l'autre.

Donc s'il y en a une seule qui soit perpendiculaire

à

à toutes les deux, il faudra necessairement que toutes celles qui sont perpendiculaires à l'une des deux enfermantes le soient à toutes les deux, & par consequent qu'elles soient toutes égales par le Lemme precedent.

VII. LEMME.

DEUX lignes ne se traversant point, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, ou tous inégalement distans. Car menans d'un point de z, *b c* perpendiculaire sur *x*: si *b c* est aussi perpendiculaire sur z, de quelque point de z qu'on mene des perpendiculaires sur *x* elles seront égales à *b* c par le 5e. Lemme; & ce sera la même chose de quelque point d' *x* qu'on mene des perpendiculaires sur z. XI.

Que si au contraire *b* c est oblique sur z, toutes les perpendiculaires des points de z sur *x* seront inégales, (5. *sup.*) & par consequent tous les points de z inégalement distans d'*x*. Et il en sera de même des perpendiculaires sur z menées des points d'x, qui par la même raison seront toutes inégales entr'elles. Et par consequent aussi tous les points d' *x* seront inégalement distans de z.

Mais remarquez que je ne dis pas qu'un point d'*x* ne puisse être aussi distant de z qu'un point de z est distant d' *x*, mais seulement que tous les points d' *x* sont inégalement distans de z, & tous les points de z inégalement distans d'*x*.

VIII. LEM.

VIII. Lemme.

XII. Si deux lignes menées d'un même point sont inclinées l'une sur l'autre, tous les points de chacune sont inégalement distans de l'autre, & les plus courtes perpendiculaires des points de chacune sur l'autre sont celles qui sont les plus proches du point de la section.

Z

x

k

Car on ne peut tirer d'un point de Z une perpendiculaire sur *x*, qu'elle ne soit oblique sur Z, par V. 37. Dont tout le reste suit par le second Lemme.

TROIS PROPOSITIONS FONDAMENTALES

des Paralleles.

Ces Lemmes donnent trois marques certaines pour reconnoître si deux lignes sont paralleles selon la notion positive, c'est à dire si tous les points de chacune sont également distans de l'autre; ce qui fera les trois Propositions suivantes.

I. Proposition.

XIII. Si deux lignes sont coupées par une ligne perpendiculaire à l'une & à l'autre, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par conséquent elles sont paralleles. 5. & 6e. Lemmes.

II. Pro-

II. PROPOSITION.

SI deux points d'une ligne sont également distans d'une autre ligne, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par consequent elles sont paralleles 4. & 5e. Lemmes. XIV.

Soient *b* & c deux points de la ligne Z également distans de la ligne *x*; *bf* & c g perpendiculaires sur *x* seront égales.

Donc elles seront aussi perpendiculaires sur Z, par le 4e. Lemme.

Donc toutes les autres lignes menées des points de Z perpendiculairement sur *x* seront aussi perpendiculaires sur Z, & égales à ces deux-là (par le 6e. Lemme.) Et il en sera de même de celles qu'on menera des points d'*x* perpendiculairement sur Z.

III. PROPOSITION.

DEUX lignes ne se croisant point & étant enfermées entre deux lignes, ne sçauroient être égales & être perpendiculaires, l'une sur une des enfermantes & l'autre sur l'autre, qu'elles ne le soient chacune sur toutes les deux (par le 4e. Lemme,) & que par consequent ces lignes enfermantes ne soient paralleles (par le 6e. Lemme.) XV.

I. COROLLAIRE.

TOUTES les perpendiculaires entre deux paralleles sont égales: car c'est cela même qui les rend paralleles. XVI.

II. COROLLAIRE.

LES obliques entre paralleles sont plus longues XVII.
que

que les perpendiculaires. Car chaque oblique est plus longue que sa perpendiculaire, (V. 36.) & toutes les perpendiculaires sont égales.

PROBLEME.

XVIII. MENER par un point donné une parellele à une ligne donnée.

Soit la ligne donnée *x*, & le point donné *b*; on peut en diverses manieres mener par le point *b* une parallele à *x*.

PREMIÉRE MANIERE.

Du point *b* mener sur *x* la perpendiculaire *bf*; & mener par *b* une perpendiculaire sur *b f*, comme peut être *m b*, elle sera parallele à *x* (par la ve proposition.)

m b x f

SECONDE MANIERE.

Ayant mené de *b* sur *x* la perpendiculaire *b f*, en élever une autre d'un autre point quelconque d'*x*, comme *g c*: la prenant égale à *b f*, & joignant les points c & *b*, c *b* sera parallele à *x*, par la 2.de proposition.

c b Z x g f

TROISIÉME MANIERE PLUS COURTE ET PLUS FACILE.

Du point *b* tirer sur *x* une oblique quelconque, comme *b d*. Du centre *d*, intervalle *d b*, décrire l'arc *b* K, qui coupe *x* en K. Puis du centre *b*,

b, intervalle *bd*, décrire une portion de circonference dans laquelle on puisse prendre l'arc *d* c, égal à l'arc *b* K; la ligne c *b* sera parallele à *d* K, c'est à dire à *x*.

c b d K x

Car les deux arcs *b* K, & *d* c, étant égaux & de cercles égaux, les cordes de ces arcs seront égales.

De plus *b* c, & *d* K, sont égales aussi, parce que ce sont rayons de cercles égaux.

Donc *d b* étant égale à elle même, les trois lignes d'une part *d b*, *d* c, c *b*, & les trois de l'autre *b d*, *b* K, *d* K sont égales chacune à chacune.

Donc le point *d* est autant éloigné de la ligne c *b*, que le point *b* de la ligne *d* K, par V. 58.

Donc les perpendiculaires de *d* sur c *b*, & de *b* sur *d* K, sont égales.

Donc c *b* & *d* K sont paralleles par la 3.[e] proposition.

I. Théoréme.

XIX. Deux lignes ne sçauroient être paralleles à une troisiéme, qu'elles ne le soient entr'elles.

Si *x* & *z* sont chacune parallele à *y*, elles le sont entr'elles. Car soit élevé d'un point d'*x* une perpendiculaire qui coupe *y* & *z*, elle coupera perpendiculairement *y*, parce que *x* & *y* sont paralleles. Et étant perpendiculaire sur *y*, elle le sera aussi sur *z*, parce qu'*y* & *z* sont paralleles.

x y z

Donc *x* & *z* auront une même perpendiculaire. Donc elles seront paralleles, (13. *Sup.*)

Corol-

COROLLAIRE.

XX. ON ne sçauroit faire passer par le même point deux differentes lignes qui soient paralleles à une même. Car il faudroit par le Theoréme precedent qu'elles fussent paralleles entr'elles, ce qui est absurde, puis qu'elles auroient un point commun, & qu'il est de l'essence des paralleles de ne se rencontrer jamais.

II. THEORÉME.

XXI. LES également inclinées entre les mêmes paralleles sont égales, & les égales sont également inclinées.

Soient les paralleles *x* & *y*. Soient *b f* & *c g* également inclinées entre ces paralleles. Soient menées de *b* & de *c* les perpendiculaires *b p* & *c q*; ces perpendiculaires sont égales. Donc afin que *b f* & *c g* soient également inclinées, il faut que les éloignemens du perpendicule *f p* & *g q* soient égaux : or cela étant, les obliques sont égales par V. 48.

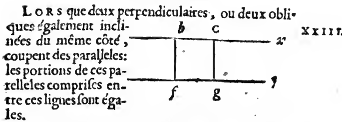
Et par la même raison les obliques *b f* & *c g* étant égales, & les perpendiculaires *b p* & *c q* égales aussi, les éloignemens du perpendicule *f p* & *g q* seront égaux, (V. 51.) Donc ces obliques égales seront également inclinées.

III. THEORÉME.

XXII. LES plus inclinées entre les mêmes paralleles sont les plus longues, & les plus longues sont les plus inclinées; cela se prouve de la même sorte par V. 53.

IV. Theoréme.

Lors que deux perpendiculaires, ou deux obliques également inclinées du même côté, coupent des paralleles: les portions de ces parelleles comprises entre ces lignes sont égales. XXIII.



1. Cela est clair pour les perpendiculaires. Car *bc* & *fg* sont chacune perpendiculaire aux deux *bf* & *cg*, & par consequent égales par le cinquiéme Lemme.

2. Si ces deux coupantes sont également obliques du même côté, comme *bd* & *ck*; je dis que *bc* & *dk* se trouveront aussi être égales. Car tirant les perpendiculaires *bf* & *cg*: par le premier cas *bc* est égale à *fg*.

Or *df* est égale à *kg*, parce que ces obliques sont supposées également inclinées. Donc ajoûtant *fk* à l'une & à l'autre, *dk* sera égale à *fg*. Donc *dk* est égale à *bc*, qui est égale à *fg*. Et il n'importe que les lignes fussent si proches que les éloignemens du perpendicule entreroient l'un dans l'autre, comme en cette figure.

Car $bc = fg$.
Et $df = kg$.
Donc ôtant kf de l'un & de l'autre,
$dk = fg$, & par consequent à bc.

V. Theo-

V. Theoréme.

XXIV. Les obliques également inclinées du même côté entre paralleles sont paralleles elles-mêmes.



Soient comme devant *b d* & c k également inclinées entre les paralleles *x* & *y*. Soit menée l'oblique *b* k.

b d = *k c*. Par l'Hypothese & le 2.[d] Theoréme.

d k = *c b*. Par le Theoréme precedent.

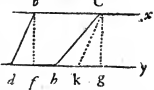
b k = *k b*. C'est à dire à soi-même.

Donc par V. 58. les perpendiculaires de k sur *b d* & de *b* sur c k sont égales. Donc les lignes *b d* & c k sont paralleles par 15. S.

VI. Theoréme.

XXV. Les inégales entre paralleles, quoi qu'inclinées du même côté, ne peuvent être paralleles, non plus que les égales qui sont inclinées de divers côtez. Car

1. Supposons que *b d* & *c b* entre les paralleles *x* & *y* soient inégales. Soit tirée de C, C *k* égale à *b d*, & inclinée du même côté que *b d*; par le Theoréme précedent *b d* & C k sont paralleles. Donc *b d* & C *b* ne peuvent pas être paralleles, par 20. S.



2. On

2. On prouvera de la même sorte que *b d* & C *q* étant égales, mais inclinées de divers côtez, ne sçauroient être paralleles, parce que C k égale aussi à *b d*, mais inclinée du même côté, lui est parallele.

b C d k q

VII. Theoréme.

Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont égales elles sont paralleles. XXVI.

Soient les quatre lignes *b* C, *d*k, *b d*, Ck; ayant tiré l'oblique *b* k;

d k = *b c*. Par l'Hypothese.

b d = *c k*. Par la même Hypothese.

b k = *k b*. C'est à dire égale à soi-même.

b c d k

Donc par V. 58. les perpendiculaires de *b* sur *d k*, & de *k* sur *b c*, sont égales. Donc *b c* & *d k* sont paralleles par 15. S.

VIII. Theoréme.

Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont paralleles elles sont égales. XXVII.

Soit fait comme auparavant; *b c* & *d k* sont paralleles. Donc *b d* & *c k* qui sont entre ces paralleles ne sçauroient être elles-mêmes paralleles qu'elles ne soient égales & inclinées du même côté par le sixiéme Theoréme. Donc elles sont égales.

Mais étant égales & inclinées du même côté,

les

les portions des paralleles qui sont comprises entre ces lignes sont égales par le 4.e Theoréme. Donc *b c* & *d k* sont égales.

IX. Theoréme.

XXVIII. Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si deux des opposées sont paralleles & égales, les deux autres opposées sont aussi paralleles & égales.

Si *b* C & *d* K sont paralleles & égales ; donc les perpendiculaires *b f* & K *g* sont égales, & *b g* égale à *f* K, par 23. *Sup.*

Donc *d f* égale à *g* C. I. 19.

Donc *b d* & K C sont égales, par V. 48.

Et paralleles par 24. & 26. *Sup.*

X. Theoréme.

XXIX. Les lignes qui enferment des paralleles égales, sont paralleles elles-mêmes. On le prouve de la même sorte.

Corollaire.

XXX. Les lignes qui enferment des paralleles inégales ne sçauroient être paralleles.

Car si les paralleles *b* C & *f g*, enfermées entre *x* & Z, étoient inégales : prenant *g* K égale à *b* C, la ligne *b* K par le Theoréme precedent est parallele à *x*. Donc *x* n'est pas parallele à Z, par 10. *sup.*

XI. Theo-

XI. Theoréme.

Quand une ligne en coupe deux obliquement, & qu'elle est inclinée sur chacune du même côté, toutes les paralleles à cette coupante enfermées entre ces deux mêmes lignes sont inégales: & les plus courtes sont celles qui sont vers le côté vers lequel cette premiere coupante étoit inclinée. XXXI.

Soient *x* & *z*, coupées l'une & l'autre obliquement par *bc*, inclinée vers K; je dis que *fg* & *pq*, paralleles à *bc*, & enfermées aussi entre *x* & *z*, seront inégales: & *fg* plus proche de K sera la plus courte, & *pq* la plus longue. Car soit menée *zn*, perpendiculaire sur les trois paralleles, & *xt* de mêmes perpendiculaire sur toutes les trois: par le 8.e Lemme, *fi* est plus courte que *bm*, & *bm*, que *pn*; & de mêmes *rg* plus courte que *lc*, & *lc* que *tq*.

Or (par 23. *sup.*) *ir*, *ml*, & *nt* sont égales.

Donc (par l. 21.) *fg* est plus courte que *bc*, & *bc* que *pq*. Ce qu'il falloit demontrer.

I. Corollaire.

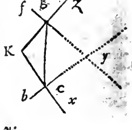
Il s'ensuit delà, 1. Que deux lignes coupées par une ligne qui coupe toutes les deux obliquement, & qui est inclinée sur chacune du même côté, ne sçauroient être paralleles. (30. *sup.*) XXXII.

II. Corollaire.

XXXIII. 2. Que ces lignes se r'approchant toûjours vers le côté vers lequel cette coupante est inclinée, étant prolongées de ce côté-là, se rencontreront à la fin. V. 11.

XII. Theoréme.

XXXIV. Deux differentes lignes se joignant en un même point, les perpendiculaires sur chacune de ces lignes se rencontreront étant prolongées du côté qui regarde la concavité que font ces lignes jointes à un même point.

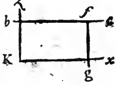


Soient les deux lignes K *z* & K *x*, dont K *z* soit coupée en *g*, perpendiculairement par *f g*, & K *x* coupée en c perpendiculairement par *b* c. Soient joints les points *g* & c; il est clair que *g* c est oblique tant sur *f g* que sur *b* c, & inclinée sur l'une & sur l'autre vers *y*:

Donc elles se rencontreront étant prolongées de ce côté là, par 33. *sup.*

XIII. Theoréme.

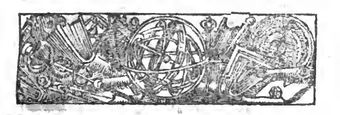
XXXV. Deux lignes se joignant perpendiculairement, les perpendiculaires sur l'une & sur l'autre se joindront aussi perpendiculairement.



Soient K *z* & K *x* perpendiculaires; si *b c* est perpendiculaire sur K *z*, elle est parallele à K *x*, par 13. *sup.*

Donc *g f* ne peut être perpendiculaire sur K *x*, qu'elle ne le soit aussi sur *b c*.

NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SEPTIE'ME.

DES LIGNES TERMINE'ES A UNE CIRCONFERENCE,

Où il est parlé

DES SINUS,

Et de la Proportion des Arcs de divers Cercles à leurs Circonferences, & du Parallelisme des Lignes Circulaires.

JUSQUES icy nous avons consideré les lignes droites entant qu'elles sont terminées à d'autres lignes droites, ou qu'elles leur sont paralleles. Nous les considerons maintenant entant qu'elles sont terminées à quelque point d'une circonference.

On les peut distinguer par les diverses situations du point d'où elles sont menées à la circonference. Car ce point est

1. *Ou dans la circonference même,*
2. *Ou au dedans du cercle,*
3. *Ou au dehors.*

1. *Quand il est dans la circonference même, ce sont les lignes qui sont menées d'un point de la circonference à un autre point de la même circonference; Et ce sont celles que nous avons déja dit s'appeller* des cordes.

2. *Quand le point est au dedans du cercle, si ce point est le centre, ce sont* des rayons. *Mais si ce n'est pas le centre, on les peut appeller* des secantes interieures.

3. *Et quand ce point est hors le cercle : ou ces lignes entrent dans le cercle, le coupant dans sa convexité & étant terminées à sa concavité : ou elles n'entrent point dans le cercle; & alors elles sont telles, que si on les prolongeoit elles y entreroient, & tant celles-là que celles qui y entrent, peuvent être appellées* des secantes exterieures.

Ou bien, quoi que prolongées, elles n'entrent point dans le cercle; & ce sont celles-là que l'on dit toucher le cercle, & que l'on appelle pour cette raison des tangentes.

Mais parce que les deux derniers genres, hors la derniere espece du 3.e qui est des tangentes, peuvent être compris dans les mêmes propositions, nous renfermerons tout cela en 3 sections, Dont

La 1.re sera des cordes.

La 2.de des secantes interieures & exterieures.

La 3.e des tangentes.

Et nous y en ajoûterons une 4.e qui sera du parallelisme des lignes circulaires.

PREMIERE SECTION.

DES CORDES.

PREMIER THEORÉME.

LES lignes droites qui coupent les cordes peuvent avoir trois conditions. 11.

La 1.re De les couper perpendiculairement.

La 2.de De les couper par la moitié.

La 3.e De passer par le centre.

Or deux de ces conditions étant données, donnent la 3.e

C'est à dire :

1. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, elles passent par le centre.

2. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & qu'elles passent par le centre, elles les coupent par la moitié.

3. Si elles les coupent par la moitié & qu'elles passent par le centre, elles les coupent perpendiculairement.

Soient pour tous les cas le centre C, & la corde *m n*, coupée par *f g*.

PREUVE DU PREMIER CAS.

Si *f g*, étant perpendiculaire à *m n*, la coupe par la moitié; le point *g* est également distant des extrémités de la coupée *m* & *n*. Donc *f g* étant prolongée doit contenir tous les points de ce plan également distans d'*m* & *n*, par V. 42. Or le centre est un de ces points : Donc il se doit trouver

dans *f g* prolongée. Ce qu'il falloit demontrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Si *fg* coupe perpendiculairement *m n*, & qu'étant continuée elle passe par le centre, il y a un point dans cette ligne, sçavoir le centre, qui est également distant d'*m* & *n*. Donc tous les autres points de cette ligne *f g*, dont l'un est le point de la section, sont également distans d'*m* & *n*. (par V. 31. & 32.) Donc *m n* est divisée par la moitié.

PREUVE DU TROISIÉME CAS.

Si *f g* divisant *m n* par la moitié, étant prolongée passe par le centre, il y aura deux points dans cette ligne, sçavoir le point de la section, & le centre, également distans d'*m* & *n*. Donc *f g* est perpendiculaire à *m n*, par V. 32.

I. COROLLAIRE.

111. AYANT trois points d'une circonference, on a toute la circonference.

Car qui a un point de la circonference & le centre, l'a toute entiere, par V. 22.

Or qui a trois points de la circonference, en a le centre. Ce qui se prouve de cette sorte:

Il est clair que ces trois points ne peuvent pas être dans la même ligne droite, parce que tous les points d'une circonference doivent être également distans d'un même point, sçavoir le centre, & qu'il est impossible que trois points d'une ligne droite soient également distans d'un même point, par V. 50.

b

c

d

Ainsi

Ainſi joignant ces trois points deux à deux, on a trois cordes qui ſoûtiennent 3 arcs de cette circonference.

Donc le centre ſe trouvera dans l'interſection de deux lignes qui couperont perpendiculairement & par la moitié deux de ces 3 cordes.

Car par le precedent Theoréme chacune de ces perpendiculaires paſſe par le centre. Donc le centre eſt le point qui leur eſt commun. Et par là on voit combien il eſt facile de reſoudre le Probleme que voicy:

PROBLEME.

Trouver la circonference qui paſſe par trois divers points donnez. IV

Il ne faut que faire ce qui a ſervi de preuve au Theoréme precedent, en remarquant que ſi ces trois points étoient dans la même ligne droite, le Probleme ſeroit impoſſible, parce que les perpendiculaires étant paralleles ne ſe rencontreroient jamais: au lieu qu'il eſt toûjours poſſible quand ils ſont en deux differentes lignes, parce que les lignes qui les couperont perpendiculairement ſe rencontreront. VI. 34.

II. COROLLAIRE.

DEUX circonferences ne peuvent avoir trois points communs, qu'elles ne les ayent tous. Car par le premier Corollaire ces 3 points communs auront le même centre. Donc ces cercles ſeront concentriques. Or deux cercles étant concentriques, s'ils ont un rayon égal, tous les points des circonferences ſont enſemble: comme quand un cercle de bois convexe eſt emboité dans un autre cercle de bois qui eſt creux. V.

III. Corollaire.

VI. Deux cercles ne se peuvent couper en plus de deux points. Car s'ils se coupoient en trois, leurs circonferences auroient 3 points communs, & par consequent les auroient tous, & ainsi ne se couperoient point.

II. Theoréme.

VII. Les lignes qui coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, coupent aussi par la moitié les arcs grands & petits que soûtiennent ces cordes de part & d'autre.

Soit la corde *m n* coupée par *f h* perpendiculairement & par la moitié; je dis que chacun des arcs *m f n*, & *m h n*, sont coupez par la moitié, l'un en *f*, & l'autre en *h*. Car *f g* étant perpendiculaire à *m n*, & ayant un de ses points, sçavoir le point de section, également distant d'*m* & *n*, tous ses autres points, comme *f* & *h*, seront aussi également distans d'*m* & *n*, par V. 42. Donc tirant les cordes *f m* & *f n*, elles seront égales, & par consequent les arcs qu'elles soûtiennent seront égaux, par V. 26. Donc par la même raison les cordes *h m* & *h n* seront égales, & les arcs qu'elles soûtiendront égaux. Donc les deux arcs *m f n*, & *m h n*, seront chacun partagez par la moitié par la ligne *f g*.

Corollaire.

VIII. Tout rayon perpendiculaire à un diametre, coupe par la moitié la demy-circonference que soûtient

tient ce diametre. Car y ayant un point dans ce rayon perpendiculaire à ce diametre également distant des extrémitez de ce diametre, sçavoir le centre : tous les autres points de ce rayon seront aussi également distans des extrémitez de ce diametre. Donc le point où ce rayon coupe cette demy-circonference en sera également distant. Donc cette demy-circonference sera coupée par la moitié. Par V. 26.

III. Theoréme.

La ligne qui passant par le centre coupe un arc par la moitié, coupe aussi par la moitié & perpendiculairement la corde qui soûtient cét arc. IX.
Car il y a alors deux points dans la ligne qui coupe l'arc par la moitié, le centre & le point de section de l'arc, dont chacun est également distant des deux extrémitez de la corde.

IV. Theoréme.

Les cordes également distantes du centre dans le même cercle, ou dans cercles égaux, sont égales ; & les égales sont également distantes du centre ; & les plus proches du centre sont les plus grandes. X.

Cela est clair des diametres, qui sont également proches du centre, puis qu'ils passent tous par le centre

Et il est clair aussi que tout diametre est plus grand que toute autre corde, puisque tirant du centre deux rayons aux extrémitez de toute autre corde, ces deux rayons seront égaux au diametre & plus grands que cette corde. par V. 5.

Pour ce qui est des autres cordes : 1. Les également distantes du centre sont égales. Car si *m n* & *f g* sont également distantes du centre : Donc les perpendiculaires du centre à chacune sont égales, puis que c'est ce qui mesure la distance de ces cordes d'avec le centre. V. 38.

Et de plus ces perpendiculaires les divisent chacune par la moitié, par 2. *sup.* Donc tirant les rayons c *n* & c *g* : *l n*, & *h g* (qui sont les moitiez de chacune de ces cordes) seront égales, par V. 51. parce que les obliques c *n* & c *g* sont égales, & les perpendiculaires aussi c *l* & c *h*. Donc les toutes *m n* & *f g* sont égales. Ce qu'il falloit demontrer.

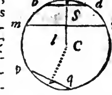
2. Les égales sont également distantes du centre ; car y ayant égalité entre les moitiez de ces cordes *l n* & *h g*, qui peuvent être considerées comme les éloignemens du perpendicule, & entre les rayons c *n* & c *g*, qui sont les obliques : il faut qu'il y ait aussi égalité entre les perpendiculaires du centre à ces cordes qu'elles divisent par la moitié, (V. 52) & qu'ainsi ces cordes soient également distantes du centre.

3. Les plus proches du centre sont les plus longues ; car si la corde *m n* est plus proche du centre que la corde *p q*, elle doit être plus grande que la corde *p q*, parce que la perpendiculaire *c l* étant plus courte que la perpediculaire C *r*, & les obliques C *n* & C *q* étant égales : l'éloignement du perpendicule *l n* doit être plus grand que l'éloignement du perpendicule *r q*. (V. 55.) C'est à dire que la moitié d'*m n* est plus grande que la moitié de *p q*.

V. THEO-

V. Theoréme.

Dans les mêmes cercles, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes soûtiennent les plus grands arcs du côté que ces arcs sont plus petits que la demycirconference. XI.



Soit *m n* plus grande que *p q*; je dis que l'arc *m n* est plus grand que l'arc *p q*. Car prolongeant la perpendiculaire *C l* jusques à ce qu'elle soit aussi longue que la perpendiculaire *C r*, comme *C S*, & tirant la corde *b d*, qui soit perpendiculaire à *C S*, cette corde *b d* est égale à *p q*, par le Theoréme precedent. Et ces deux cordes *m n* & *b d* étant paralleles (par VI. 13.) ne se peuvent jamais rencontrer.

Donc l'arc *m n* ne pourra manquer de comprendre l'arc *b d*. Donc il sera plus grand que l'arc *b d*, puisque le tout est plus grand que sa partie.

Donc l'arc *m n* est plus grand aussi que l'arc *p q*, qui est égal à l'arc *b d*. Ce qu'il falloit demontrer.

D'une autre mesure des Arcs, qui sont les Sinus.

Definitions.

Quand un arc est moindre que la moitié de la demy-circonference, ou le quart de la circonference, la perpendiculaire de l'une des extrémitez de l'arc sur le rayon ou le diametre qui se termine à l'autre extrémité, s'appelle *le sinus* de cét arc; & la partie du rayon ou diametre qui est depuis la rencontre de la perpendiculaire, ou sinus, jusqu'à l'extrémité de l'arc, s'appelle *le sinus verse*. XII.

Soit une circonference, dont le centre est C, & un arc $f\,d$ moindre que la moitié de la demy-circonference. Soit tiré le rayon C d, & la perpendiculaire $f\,g$ du point f sur ce rayon : cette perpendiculaire $f\,g$ est le *sinus* de l'arc $f\,d$; & $g\,d$ en est le *sinus verse*.

I. Lemme.

XIII. Que si on continuë $f\,g$ jusqu'à h, autre point de la circonference, il est clair par le 1.er Theoreme qu'$f\,h$ est partagée par la moitié par C d, & qu'ainsi le sinus $f\,g$ est la moitié de la corde $f\,h$.

II. Lemme.

XIV. Et il est clair aussi par le 2.d Theoréme que l'arc $f\,d\,h$, soûtenu par la corde $f\,h$, est double de l'arc $f\,d$, dont $f\,g$ est le sinus.

D'où il s'ensuit qu'on peut encore definir le *sinus* :

(Autre Definition des Sinus.)

XV. La moitié de la corde du double de l'arc.

Car $f\,g$ est la moitié de la corde $f\,h$, laquelle corde $f\,g\,h$ soûtient l'arc $f\,d\,h$, lequel est double de l'arc $f\,d$. Tout cela étant supposé, soit

VI. Theoréme.

XVI. Dans le méme cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs qui ont le sinus égal sont égaux ; & les sinus égaux donneront des arcs égaux ; & les arcs qui ont les plus grands sinus, sont les plus grands. Car par le 1.er Lemme les sinus égaux sont moitiez de cordes égales. Or par

par le 2.d Lemme ces cordes égales soûtiennent des arcs égaux qui sont doubles des arcs qui ont pour sinus ces sinus égaux. Donc les arcs doubles de ceux-là étant égaux, ceux là le sont aussi. La converse se prouve de la même sorte, sans qu'il soit besoin de s'y arrester.

Et de mêmes quand un sinus est plus grand que l'autre, la corde dont le plus grand est la moitié, est plus grande aussi que la corde dont le plus petit est la moitié. Donc cette plus grande corde soûtient un plus grand arc. Or l'arc qu'elle soûtient est double de celui dont la moitié de cette plus grande corde est le sinus. Donc l'arc dont la moitié de cette plus grande corde est le sinus, est plus grand que l'arc qui a pour sinus la moitié d'une plus petite corde. (Ce qu'il falloit demonstrer.)

VII. THEORÉME.

QUAND les sinus sont égaux, les sinus verses les sont aussi, & les plus grands sinus donnent les plus grands sinus verses. XVII.

Car les sinus égaux sont également distans du centre.

Or cette distance du centre ôtée du rayon, ce qui reste est le sinus verse. Donc cette distance étant égale, le sinus verse est égal.

Que si le sinus est plus grand, cette distance est plus petite. Donc ôtant moins du rayon, ce qui reste, qui est le sinus verse, est plus grand.

AVERTISSEMENT.

LES *sinus ne mesurent proprement que les arcs moindres que la moitié de la demy-circonference. Mais cela n'empêche pas qu'on ne s'en puisse servir pour mesurer ceux qui sont plus grands. Car ce qui manque à ces plus grands arcs pour faire la* XVIII.

demycirconference, s'appelle le complement de ces plus grands arcs. Or ces complemens se mesurent par les sinus; & il est aisé de juger que ces complemens étant égaux, ces plus grands arcs sont égaux aussi. Mais qu'étant inégaux, celui qui a le plus petit complement est le plus grand.

VIII. THEORÉME.

XIX. QUAND plusieurs circonferences sont concentriques, & que du centre on tire des lignes indefinies, les arcs de toutes ces circonferences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonferences.

Soient autour du centre C deux circonferences concentriques, & soient tirées les deux lignes C B & C D; je dis que l'arc B D de la plus grande, & *b d* de la plus petite, sont proportionels à leurs circonferences.

Car les aliquotes quelconques de B D soient appellées X; je dis que si par tous les points de section on tire des lignes au centre, *b d* sera divisée par ces lignes en aliquotes pareilles.

Pour le prouver il suffit de considerer deux X, que je suppose être BF & FG. Tirant les lignes F C & G C, je dis que les arcs *b f* & *f g* sont égaux entr'eux aussi bien que BF & FG. Car tirant d'F une perpendiculaire sur BC & une autre sur G C, les deux perpendiculaires F *p* & F *q* seront les sinus d'arcs égaux, & par consequent égales (par 16. *sup.*) & les sinus verses de ces arcs B *p* & G *q* seront aussi égaux, (par 17. *sup.*) Donc *p b* & *q g* seront aussi égales.

Donc F *b* & F *g* sont égales, parce que ce sont les obliques dont les perpendiculaires F *p* & F *q*

sont

ſont égales, comme auſſi les éloignemens des perpendicules *p b* & *q g*. V. 48.

Donc dans la ligne F C il y a deux points, ſçavoir F & C, dont chacun eſt également diſtant de *b* & de *g*.

Donc F C coupe perpendiculairement & par la moitié la corde *b g*, & par conſequent auſſi l'arc *b f g*, (par 7. *ſup.*)

Donc l'arc *b f* eſt égal à l'arc *f g*. Ce qu'il falloit demontrer.

Or cela étant demontré, il eſt clair qu'on prouvera la même choſe de toutes les aliquotes de B D en les prenant deux à deux.

Donc B D étant diviſé en aliquotes quelconques, les lignes menées au centre par tous les points de ſection feront des aliquotes pareilles dans *b d*, leſquelles on pourra appeller *x*.

Or appliquant X pour meſurer le reſte de la grande circonference, ſi elle s'y trouve préciſément tant de fois: menant des lignes par tous les points de ſection, *x* ſe trouvera auſſi préciſément tant de fois dans la petite circonference. Et ſi ce n'eſt dans la grande qu'avec quelque reſte, ce ne ſera auſſi dans la petite qu'avec quelque reſte.

Donc, par la definition des grandeurs proportionnelles, B D eſt à la grande circonference, comme *b d* à la petite, puiſque les aliquotes quelconques pareilles de B D & de *b d* ſont également contenuës dans les deux circonferences.

DEFINITION.

Les arcs qui ont même raiſon à leur circonference, ſoient appellez proportionnellement égaux, ou d'autant de degrez l'un que l'autre. Surquoi il ſe faut ſouvenir que toute circonference grande XX.
ou

ou petite est considerée comme divisée en 360 parties, qu'on appelle *Degrez*, & chaque degré en 60 *Minutes*, & chaque minute en 60 *Secondes*, & chaque seconde en 60 *Tierces*; & ainsi à l'infiny.

Et comme on ne regarde point la grandeur absoluë des portions d'une circonference, parce que cette grandeur nous est inconnuë, mais seulement la grandeur relative, c'est à dire par proportion à la circonference; on pourroit appeller simplement *égaux*, les arcs qui sont proportionellement égaux, parce qu'ils sont d'autant de degrez: & appeller *tout-égaux* ceux qui le sont tout ensemble proportionellement & absolument, comme sont les arcs d'autant de degrez dans le même cercle.

IX. Theoréme.

XXI. Quand les cercles sont inégaux, les arcs proportionellement égaux sont soutenus par de plus grandes cordes, & ont de plus grands sinus, dans les plus grands cercles.

Soient autour du centre C deux circonferences concentriques. Les arcs BD & *bd*, compris entre les mémes rayons BC & DC, sont proportionellement égaux.

Or tirant les cordes BD & *bd*, & les divisant par la moitié aussi bien que les arcs par la ligne PC, les arcs BP & *bp* sont aussi proportionellement égaux. Or BF & *bf*, perpendiculaires sur PC, sont les sinus de ces deux arcs.

Et par VI. 12. BF est plus grande que *bf*.

Donc les arcs égaux ont de plus grands sinus dans les plus grands cercles.

Et de mêmes la corde BD est plus grande que *bd* (par VI. 31.) & aussi parce que BF, moitié de BD, est plus grande que *bf*, moitié de *bd*.

Donc

Donc les arcs B D & *b d* étant proportionellement égaux, celui du plus grand cercle a une plus grande corde.

X. Theoréme.

Les cordes dans un méme cercle ne sont point proportionelles aux arcs, mais les plus grands arcs (j'entens toûjours ceux qui ne sont pas plus grands que la demy-circonference) ont de plus petites cordes à proportion que les plus petits. C'est à dire que la corde d'un arc qui n'est que la moitié d'un plus grand arc, est plus grande que la moitié de la corde de ce plus grand arc. XXII.

La preuve en est bien facile. Car soit l'arc *b d* partagé en *m* par la moitié; *b m* égale à *d m* seront chacune la corde d'un arc qui n'est que la moitié de l'arc que soutient la corde *b d*. Or ces deux cordes *b m* & *d m* sont plus grandes que *b d*, par V. 5. Donc étant égales, chacune est plus grande que la moitié de la corde *b d*.

Corollaire.

De là il s'ensuit que plus les arcs sont grands, plus la difference est grande entre la longueur de l'arc & celle de la corde; & qu'au contraire plus les arcs sont petits plus cette difference diminuë. De sorte qu'on peut prendre un si petit arc, que cette difference sera plus petite que quelque ligne qu'on ait donnée. XXIII.

SECON-

SECONDE SECTION.

DES SECANTES INTERIEURES ET EXTERIEURES.

XXIV. Nous avons déja dit que les lignes menées à la circonference d'un point de dedans le cercle autre que le centre se pouvoient appeller *des secantes interieures*.

Et que quand le point étoit hors le cercle, & qu'elles n'étoient point tangentes, on les pouvoit appeller des *secantes exterieures*.

Or pour abreger le discours dans l'expression de ces lignes, soient toûjours appellez

Le centre — C

Le point, soit dans le cercle, soit hors le cercle, — k.

La ligne menée de ce point passant par le centre, — kg.

Celle qui ne passant point par le centre est dans la même ligne droite que celle qui y passe, — kf.

Les autres,
- ——— kx.
- ——— ky.
- ——— kz.
- ——— $k\varphi$.

Cela supposé, soit

I. THEO-

I. THEORÉME.

LA *plus longue de ces lignes est K g. C'est à dire celle qui passe par le centre.* XXV.

Car si on la veut comparer avec K Φ, soit tiré le rayon c Φ, qui est égal à c g; apres quoi K c plus c Φ, est plus grande que K Φ, par V. 5.

Donc K g est plus grande que K Φ.

II. THEORÉME.

LA plus courte de toutes ces lignes est K f. C'est à dire celle qui ne passant point par le centre est dans la même ligne droite que celle qui y passe. XXVI.

Car comparant K f avec K y, & ayant tiré le rayon C y:
Si K est au dedans du cercle,
C K plus K f est égale à C y.
Or C y est plus courte que C K plus K y.
Donc C K plus K f est plus courte que C K plus K y.
Donc ôtant C K, qui est commun, K f est plus courte que K y.
Que si K est hors le cercle,
K f plus f C est plus courte que K y plus y C, par V. 5.
Or f C est égale à y C.
Donc K f est plus courte que K y.

III. THEO-

III. THEORÉME.

XXVII. Les lignes menées de K à des points de la circonference également distans d'*f* ou de *g* sont égales. Et il faut remarquer que deux points ne sçauroient être également distans d'*f*, qu'ils ne soient aussi également distans de *g*. Mais on appelle également distans d'*f* ceux qui sont plus proches d'*f* que de *g*, & egalement distans de *g* ceux qui sont plus proches de *g* que d'*f*.

Soient les deux points également distans d'*f*, X & *x*. (*Voyez la fig. du 5e. Theor. cy dessous.*) La corde terminée par ces deux X & *x* est coupée perpendiculairement par la ligne *f* C, (V. 32.) puisque *f* par l'hypothese est également distant d'X & *x*, & C aussi, parce que c'est le centre du cercle.

Donc tous les points de cette ligne sont également distans d'X & *x*. (par V. 42.) Donc le point K, qui en est un. Donc KX & K *x* sont égales.

C'est la meme chose de deux points également distans de *g*.

IV. THEORÉME.

XXVIII. Si du centre K, intervalle K *f*, ou K *g*, on décrit un nouveau cercle, il touchera le premier cercle en un seul point, c'est à dire en *f*, ou en *g*, sans le couper.

Car si K *f* est rayon du 2.d cercle: comme cette ligne est la plus courte de toutes celles qui peuvent être menées de K à la circonference du 1.er cercle, (par 26 sup.) toute autre ligne menée à la circonference du premier passera la circonference du second.

K C g

Et.

Et au contraire si K g est le rayon du 2.[d] cercle: cette ligne étant la plus longue de toutes celles qui peuvent être menées de K à la circonference du 1.[er] cercle, (par 25 sup.) toute autre ligne menée de K à la circonference du 1.[er] cercle ne pourra pas aller jusqu'à la circonference du 2.[d]

V. Theoréme.

Si du centre K, intervalle plus grand que K f, & plus petit que K g, comme pourroit être K x, on décrit un cercle, il coupera la circonference du premier aux points X & x; c'est à dire en deux points également distans d'f, (ou également distans de g, si on avoit pris un point plus proche de g, pour determiner cét intervalle,) & la partie de la circonference du 1.[er] cercle entre X & x, dont le milieu est f, sera au dedans du 2.[d] cercle; au lieu que la partie de la même circonference du 1.[re] cercle entre ces deux mêmes points X & x, dont g est le milieu, sera au dehors du 2.[d] cercle. Car (par 6. S.) deux circonferences ne se peuvent couper en plus de deux points. XXIX.

Or cela étant: le rayon du 2.[d] cercle étant K x, toute ligne menée de K à la circonference du 1.[er] cercle qui sera égale à K x, se trouvera aussi terminée à le circonference du 2.[d] cercle.

De plus, par le troisiéme Theoréme cette ligne égale à K x est celle qui est terminée à un point de la circonference du premier cercle, aussi distant d'f de l'autre côté qu' X en est distant de son côté. Donc X & x seront les deux seuls points dans lesquels la deuxiéme circonference coupera la premiere.

Or

Or il est clair que le point *f* se trouvera au dedans du 2.^d cercle, parce que K *f* est plus courte que K *x*, qui en est le rayon. Donc tout ce qui est d'une part entre *f* & X, & de l'autre entre *f* & *x*, se trouvera aussi au dedans du 2.^d cercle; puis qu'il faudroit que le 2.^d cercle eust coupé le 1.er en d'autres points qu' X & *x*, afin que quelques uns des points plus proches d'*f* se trouvassent ou dans la circonference du 2.^d cercle, ou au dehors.

Et par la même raison le point *g* se trouvera au dehors du 2.^d cercle, parce que K *g* est plus longue que K *x*, qui en est le rayon: ce qui fait voir aussi que tous les points de la 1.re circonference plus proches de *g* qu' *x* se trouveront aussi au dehors du 2.^d cercle.

VI. Theoréme.

XXX. De toutes les lignes menées de K, celles qui sont menées à des points plus proches d'*f* sont les plus courtes, & celles qui sont menées à des points plus proches de *g* sont les plus longues.

Supposons, par exemple, que le point *y* est plus proche d'*f* que le point *x*; je dis que K *y* est plus courte que K *x*.

Car si on décrit un cercle du centre K, intervalle K *x*: par le Theoréme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches d'*f* qu' *x* se trouveront au dedans du deuxiéme cercle.



Or, par l'hypothese, *y* est plus proche d'*f*, qu' *x*. Donc *y* est au dedans du 2.^d cercle. Donc K *y* est plus courte que K *x*, qui est un rayon du 2.^d cercle.

Que

Que si au contraire nous supposons que ϕ est plus proche de *g* que z; je dis que Kϕ est plus longue que Kz. Car si on décrit un cercle du centre K, intervalle K z: par le Theoréme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches de *g* que z, se trouveront au dehors du deuxiéme cercle. Or, par l'hypothese, ϕ est plus proche de *g* que z. Donc ϕ est au dehors du cercle. Donc Kϕ est plus longue que Kz, qui est un rayon du deuxiéme cercle.

I. Corollaire.

De nul point autre que le centre on ne peut XXXI.
mener trois lignes égales à la circonference. Car les trois points où ces trois lignes seroient terminées ne peuvent pas être également distans du point *f*, ou du point *g*. Donc si l'un des trois est plus proche ou plus éloigné du point *f*, la ligne qui y sera terminée sera plus courte ou plus longue que les deux autres. Donc, &c.

II. Corollaire.

Le point d'où l'on peut mener trois lignes XXXII.
égales à la circonference, en est necessairement le centre.

TROISIE'ME SECTION.

Des Tangentes.

Nous avons déja dit qu'on appelle *tangente* du XXXIII
cercle la ligne qui touche le cercle sans entrer dedans, quoi que prolongée.

I. The-

I. THEORÉME.

XXXIV. TOUTE ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon touche le cercle, & ne le touche qu'en un seul point; c'est à dire qu'il n'y a qu'un seul point qui soit commun à la circonference & à cette ligne; & ce point s'apelle *le point de l'attouchement.* Car puisque le rayon est perpendiculaire à cette ligne, c'est la plus courte de toutes les lignes qui puissent être menées du centre à cette ligne. Donc toute autre menée du centre sera plus longue. Donc elle se terminera en un point hors de la circonference. Donc nul autre point que celui où ce rayon coupe perpendiculairement cette ligne ne pourra être commun à cette circonference & à cette ligne. Ce qu'il falloit demontrer.

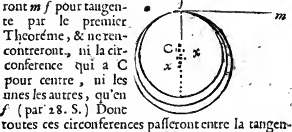
II. THEORÉME.

XXXV. ON ne peut faire passer aucune ligne droite entre la tangente & la circonference, quoi qu'on en puisse faire passer une infinité de circulaires qui ne se rencontreront que dans le point de l'attouchement.

La premiere partie se prouve ainsi : Soit C *f* un rayon, *m f* la tangente: soit *b* un point quelconque au dessous de la tangente. Tirant de *b* une ligne à *f*, elle sera oblique sur C *f*, & inclinée vers C, parce que *m f* est perpendiculaire à C *f*. Donc la perpendiculaire de C à *b f* sera plus courte que C *f*, par V. 36. Donc elle se terminera dans le cercle (V. 27.) Donc une partie de *b f* sera au dedans du cercle. Donc on n'aura pas pû faire passer *b f* entre la tangente & la circonference.

La deuxiéme partie se prouve ainsi : Soit *f* C pro-

prolongée à l'infiny du côté de C, & soient tous les divers points de cette ligne au dessous de C appellez *x*. Toutes les circonferences qui auront l'un de ces points que j'appelle *x* pour centre, & *x f* pour rayon, auront *m f* pour tangente par le premier Theoréme, & ne rencontreront, ni la circonference qui a C pour centre, ni les unes les autres, qu'en *f* (par 28. S.) Donc toutes ces circonferences passeront entre la tangente & le premier cercle sans se rencontrer.



I. Probleme.

Décrire la tangente qui touche la circonference en un point donné. XXXVI.

Tirer un rayon de ce point donné ; la perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon sera la tangente que l'on cherche.

II. Probleme.

D'un point donné hors le cercle tirer des tangentes au cercle. XXXVII.

Soit le point K donné hors le cercle, dont le centre est C, & le rayon C *f*. Je décris un autre cercle du même centre, intervalle CK ; & puis ayant tiré la ligne KC, qui coupe en *f* la circonference du 1.er cercle, je tire par le point *f* la corde du grand cercle *m n*, qui coupe perpendiculairement KC, ce qui fait que *m n* touche le premier cercle en *f*.

Cela fait, du point K je prens dans le grand cercle de part & d'autre les deux arcs K *b* & K *d*, égaux chacun à l'arc *m n*; Et je dis que les cordes K *b* & K *d* touchent le 1.er cercle, & qu'elles le touchent au point où les rayons du grand cercle *m* C & *n* C coupent ces cordes :

Car les trois arcs du grand cercle *m n*, K *b*, K *d* étant égaux, les trois cordes qui les soûtiennent sont égales aussi, & par consequent également distantes du centre, par 10. *sup*. Or *m n* est distante du centre C de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc les deux autres cordes K *b* & K *d* sont aussi distantes du centre de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc ce rayon leur est perpendiculaire, puis qu'autrement il ne mesureroit pas leur distance d'avec le centre. (V. 38.)

Donc par 34. *sup*. elles sont tangentes du premier cercle.

Et elles le touchent au point où elles sont coupées par les rayons du grand cercle *m* C & *n* C. Car le point K partageant par la moitié l'arc *m n*, le point *m* partage aussi par la moitié l'arc K *b*. Donc le rayon *m* C est perpendiculaire à la corde K *b*, (V. 32.) parce que les deux points *m* & C sont chacun également distans de K & de *b*.

Donc si le point où le rayon *m* C coupe la corde K *b* est *h*: ce point *h* sera aussi l'extrémité du rayon du premier cercle, qui est perpendiculaire à la corde K *b*, puis qu'autrement il faudroit que de C on pust tirer sur K *b* deux perpendiculaires differentes, ce qui ne se peut. (V. 37.)

I. COROLLAIRE.

D'UN point hors le cercle on peut tirer deux tangentes au cercle, & non plus. XXXVIII.

Cela est clair par ce qui vient d'être demontré.

II. COROLLAIRE.

ON peut considerer les tangentes comme terminées au point de l'attouchement; & alors XXXIX.

Les tangentes, ou menées à un même cercle d'un même point, ou de divers points également distans du centre, ou menées à des cercles égaux de points également distans des centres de chacun, sont égales.

Car il est visible, par la solution du deuxiéme Probleme, que dans tous ces cas, ces tangentes sont moitiez de cordes égales.

QUATRIE'ME SECTION.

DES CIRCONFERENCES PARALLELES.

I. LEMME.

UNE ligne droite est perpendiculaire à une circonference, autant que la nature de l'une & de l'autre le peut souffrir, lorsqu'elle est perpendiculaire à la tangente menée au point de la section. XL.

II. LEMME.

D'où il s'ensuit, que toute ligne qui étant prolongée passe par le centre, est perpendiculaire à la circonference. XLI.

III. Lemme.

XLII. La diſtance d'un point à une circonference ſe meſure par la plus courte ligne qui puiſſe être menée de ce point à cette circonference. Or cette plus courte ligne eſt celle qui ne comprend point le centre, mais qui eſt dans la même ligne droite que celle qui y paſſe. (S. 26.)

Et par conſequent cette ligne eſt perpendiculaire à la circonference, par les deux premiers Lemmes.

DEFINITION

des circonferences paralleles.

XLIII. Deux circonferences ſont paralleles, lorſque tous les points de chacune ſont également diſtans de l'autre.

C'eſt à dire, ſelon les precedens Lemmes, lorſque toutes les lignes droites menées chacune des points de l'une perpendiculairement ſur l'autre, ſont égales.

I. Theoréme.

XLIV. Toutes les circonferences concentriques (c'eſt à dire qui ont un même centre) ſont paralleles.

Car tous les rayons de la plus grande circonference ſont perpendiculaires à l'une & à l'autre. Donc ôtant les rayons de la plus petite, ce qui reſtera entre les deux circonferences, ſera égal, & en meſurera la diſtance. Donc tous les points de chacune ſeront également diſtans de l'autre. Donc elles ſont paralleles.

II. Theo-

II. THEORÉME.

DEUX cercles non concentriques étant l'un dans l'autre, le diametre du plus grand qui passera par les deux centres, coupera chaque circonference par la moitié; & alors il arrivera 3 ou 4 choses considerables. XLV.

1. Les parties de ce diametre qui se trouveront d'un côté & d'autre entre les deux circonferences, c'est à dire fm, gn, sont perpendiculaires à l'une & à l'autre, & mesurent fm le plus grand, & gn le plus petit éloignement de ces deux circonferences.

2. Nulle autre ligne que ces deux là qui se trouvent dans ce diametre qui passe par les deux centres, ne peut être perpendiculaire à l'une & à l'autre circonference: toute autre ligne qui sera perpendiculaire à l'une des circonferences, étant oblique sur l'autre.

3. Tous les points d'une demy-circonference d'une part sont inégalement distans de l'autre demy-circonference de la même part.

4. Toutes les fois que deux points d'une circonference sont également distans de l'une ou l'autre des extrémitez de ce diametre, qui passe par les deux centres, ils sont aussi également distans de l'autre circonference.

Tout cela est si aisé à prouver par ce qui a été dit dans la 2.e Section, & par les trois Lemmes de celle-cy, que j'aime mieux le laisser à trouver pour exercer l'Esprit, que de perdre du tems à le demontrer.

COROLLAIRE.

IL s'ensuit de là, qu'on peut remarquer trois dif- XLVI.

differences entre le parallelisme des lignes droites, & celui des lignes circulaires.

La 1.re est, que la notion negative des paralleles droites, qui consiste à ne se rencontrer jamais quand on les prolongeroit à l'infini, n'a point de lieu dans les circulaires, qui peuvent bien ne se rencontrer jamais sans être paralleles, de sorte que pour l'être il faut que ce soit selon la notion positive, qui consiste en ce que les points de l'une soint toûjours également distans de l'autre.

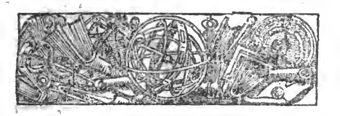
La 2.de est, que deux lignes droites sont paralleles, quand une même ligne est perpendiculaire à l'une & à l'autre. Au lieu qu'il peut y avoir non seulement une ligne droite, mais deux, qui soient perpendiculaires à l'une & à l'autre circonference, sans qu'elles soient paralleles, mais il n'y en peut pas avoir trois.

La 3.e est, que deux lignes droites ne s'étant point croisées, il ne peut pas y avoir deux points de l'une également distans de l'autre, qu'elles ne soient paralleles. Au lieu que dans les circonferences non paralleles, il peut y avoir une infinité de points dans chacune, qui soient deux à deux également distans de l'autre. Mais il n'y en peut avoir trois ensemble.

Le fondement de ces differences vient d'une part de ce que la ligne circulaire est bornée en elle-même; & de l'autre de ce qu'il en faut avoir trois points pour en avoir la position: au lieu qu'il n'en faut que deux pour avoir celle de la ligne droite.



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS
DE
GEOMETRIE.
LIVRE HUITIE'ME.

DES ANGLES RECTILIGNES.

APRES avoir parlé des lignes, c'est suivre l'ordre de la Nature que de passer aux angles, qui sont plus composez que les lignes, tenant quelque chose des surfaces, comme nous allons voir. I.

DEFINITION
DE L'ANGLE RECTILIGNE.

L'angle rectiligne est une surface comprise entre deux lignes droites qui se joignent en un point II.
du côté où elles s'approchent le plus, indefinie &

 in-

indeterminée selon l'une de ses dimensions, qui est celle qui répond à la longueur des lignes qui la comprennent, & determinée selon l'autre par la partie proportionnelle d'une circonference dont le centre est au point où ces lignes se joignent.

Autres Definitions.

III. Les lignes qui comprennent l'angle s'appellent ses *côtez*.

IV. Le point où ces lignes se joignent s'appelle son *sommet*.

V. Si l'on joint deux points de ces côtez par une autre ligne, cette ligne s'appelle *la base* ou *la soûtendante de l'angle*. Et l'on dit que cette ligne *soûtient* l'angle, & que l'angle est *opposé* à cette ligne, ou est *soûtenu* par cette ligne.

VI. Cette base s'appelle *corde* quand les côtez de l'angle sont égaux, pource qu'alors ces côtez de l'angle sont considerez comme rayons d'un cercle dont cette base est une corde.

VII. Que si de l'un des côtez on peut faire descendre une perpendiculaire sur l'autre, cette perpendiculaire s'appelle le *sinus* de cét angle.

VIII. Cette partie proportionelle de la circonference qui mesure la grandeur de l'angle s'appelle *l'arc que comprend l'angle*.

PROPOSITION FONDAMENTALE

de la mesure des Angles.

IX. Les arcs de toutes les circonferences qui ont pour centre le point où les côtez de l'angle se coupent, sont tous proportionels à leurs circonferences, & par consequent determinent tous la même grandeur de l'angle.

La consequence est claire par la definition de l'angle, puisque nous avons dit que c'étoit une sur-

surface indeterminée selon une dimension, & qui n'étoit determinée selon l'autre que par une partie proportionnelle des circonferences qui ont pour centre le point où ses costez se joignent.

Pour montrer donc que les arcs de ces circonferences determinent tous la même grandeur de l'angle, il ne faut que montrer que tous ces arcs sont proportionels à leurs circonferences.

Or c'est ce qui a déja été prouvé, Livre VII. 19.

DE LA PREMIERE MESURE DE L'ANGLE, QUI EST L'ARC COMPRIS ENTRE SES CÔTEZ.

Il s'ensuit delà que pour sçavoir la vraye grandeur d'un angle, il faut sçavoir la grandeur proportionelle de l'arc compris entre ses côtez, c'est à dire de combien de degrez est cét arc. Car un degré n'est pas le nom d'une grandeur absoluë, mais proportionelle, puisque, comme nous avons déja dit, il signifie la trois-cent soixantiéme partie de quelque circonference que ce soit, dont chacune en soy est plus grande ou plus petite selon que la circonference est plus grande ou plus petite: & il en est de même des minutes, des secondes, & des troisiémes. C'est pourquoi on peut appeller *arcs égaux*, selon qu'il a été dit VII. 20. ceux qui sont d'autant de degrez, quoi qu'ils puissent être inégaux selon leur grandeur absoluë; & égaux en toute maniere, ou *tout-égaux*, ceux qui sont d'autant de degrez, & qui sont aussi égaux selon leur grandeur absoluë, tels que sont les arcs d'autant de degrez dans les cercles égaux. X.

De l'Angle droit.

XI. C'est par là qu'on a divisé l'angle en *droit* & *non droit*, & le non droit, en *aigu* & *obtus*.

On appelle angle droit celui qui a pour mesure la moitié de la demy-circonference. D'où il s'ensuit :

1. Que tout angle droit a de l'autre côté sur la même ligne un autre angle qui lui est égal, puisque l'angle qui est de l'autre côté a pour mesure ce qui reste de la demy-circonference, & qu'il en reste justement la moitié.

2. Qu'un angle droit est la même chose qu'un angle de 90 degrez. Car la demy-circonference en ayant 180, la moitié de cette demy-circonference en a 90.

3. Que toute ligne perpendiculaire sur une ligne fait sur cette ligne deux angles droits, l'un d'un côté & l'autre de l'autre. Car elle partage en deux également la demy-circonference qui a pour centre le point de leur section, par VII. 8.

De l'Angle aigu.

XII. On appelle angle *aigu* celui qui est moindre qu'un droit, c'est à dire qui a pour mesure un arc moindre que la moitié de la demy-circonference. D'où il s'ensuit :

Que tout angle moindre que de 90 degrez est aigu.

De l'Angle obtus.

XIII. On appelle angle *obtus* celui qui est plus grand que l'angle droit, c'est à dire qui a pour mesure un arc plus grand que la moitié de la demy-circonference. D'où il s'ensuit :

Que

Que tout angle plus grand que de 90 degrez est obtus.

I. Theoréme.

Toute ligne qui en coupe une autre obliquement, fait d'un côté une angle aigu & de l'autre un obtus, & les deux ensemble valent deux droits. XIV.

Car cette ligne partage inégalement la demy-circonference, & partant fait deux angles inégaux. Mais elle ne la divise qu'en deux portions, & partant les deux portions prises ensemble valent toute la demy-circonference.

II. Theoréme.

Lorsque plusieurs lignes droites en rencontrent une en un même point & du même côté, tous les angles que font toutes ces lignes entr'elles & avec la rencontrée valent deux droits. Car ils comprennent tous ensemble la demy-circonference, qui est la mesure de deux angles droits. XV.

Definition.

L'angle aigu qui avec l'obtus vaut deux angles droits, s'appelle le *complement de langle obtus.* XVI.

III. Theoréme.

Lorsque deux lignes se coupent en passant de part & d'autre, il est bien clair que si elles se coupent perpendiculairement, elles font quatre angles égaux tous-quatre entr'eux, c'est à dire tous-quatre droits. XVII.

Mais si elles se coupent obliquement, elles en font deux aigus & deux obtus, dont l'aigu est op-

posé à l'aigu & l'obtus à l'obtus, & cela s'appelle être opposé au sommet. Et les opposez sont égaux.

Car faisant un cercle du point où ces deux lignes *b* C & *f g* se coupent, chacune coupera la circonference par la moitié, & par consequent la moitié *b g* C est égale à la moitié *f b g*. Or ces deux moitiez ont l'arc *b g* de commun, qui est l'arc d'un des angles obtus: & par consequent ôtant cét arc, l'arc de l'aigu qui reste d'une part, sera égal à l'arc de l'aigu qui reste de l'autre. On prouvera la même chose des deux angles obtus.

IV. Theoréme.

XVIII. Lorsque plusieurs lignes droites se rencontrent en un même point étant menées de toutes parts, tous les angles qu'elles font valent quatre droits. Car ils ont tous ensemble pour mesure une circonference entiére.



DES AUTRES MESURES
DE L'ANGLE.

XIX. *Quoi que l'angle n'ait en effet de vraye & naturelle mesure que l'arc d'un cercle: neanmoins comme on ne connoist pas la longueur des lignes courbes, on est obligé d'avoir recours à d'autres mesures, mais toûjours par rapport à celle-là.*

On les peut rapporter à trois, qui sont toutes prises de la base considerée diversement: ou comme *corde*: ou comme *sinus*: ou simplement comme *base*.

DE LA SECONDE MESURE DE L'ANGLE,

Qui est la Corde.

Nous commencerons par la base considerée comme corde, sur quoi il faut remarquer XX.

1. Que pour cela il faut que les côtez de l'Angle soient pris égaux. (*6. sup.*) Car alors ils sont considerez comme rayons d'un cercle dont le centre est au sommet, & ainsi la ligne qui en joint les extremitez est la corde de l'arc de ce cercle qui mesure cét angle.

2. Les angles ainsi considerez peuvent être appellez *isosceles*, c'est à dire à jambes égales.

3. Deux angles isosceles comparez ensemble peuvent être ou *équilateres* entr'eux, ou *inéquilateres*; c'est à dire que leurs côtez sont rayons ou de cercles égaux, ou de cercles inegaux.

Cela supposé, pour bien comprendre toute cette mesure de l'angle, il ne faut que faire attention à ces Lemmes tirez des Livres V. & VII.

I. Lemme.

Dans les cercles égaux les cordes égales soûtiennent des arcs tout-égaux. Et les arcs égaux sont soûtenus par cordes égales. (V. 26.) XXI.

II. Lemme.

Dans les cercles égaux les plus grandes cordes soûtiennent de plus grands arcs. Et les plus grands arcs sont soûtenus par les plus grandes cordes. VII. 11. XXII.

III. Lemme.

XXIII. Les cercles étant inégaux, les cordes égales soûtiennent des arcs de plus de degrez dans les plus petits cercles VII. 21.

IV. Lemme.

XXIV. Les arcs d'un même nombre de degrez sont soûtenus par de plus grandes cordes dans les plus grands cercles. VII. 21.

I. Theoréme.

XXV. Trois sortes d'égalitez peuvent être considerées dans deux angles isosceles.

1. L'égalité des côtez de l'un à ceux de l'autre, qui fait qu'on les appelle *équilateres entr'eux*.

2. L'égalité des cordes, qui les peut faire appeller *isocordes*.

3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux de ces égalitez étant données, donnent la 3.me

Premier Cas.

XXVI. Les angles équilateres entr'eux & isocordes sont égaux. Car ils ont pour mesure des arcs tout-égaux, puisqu'étant équilateres ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux, & que par le 1.er Lemme les cordes égales de cercles égaux soûtiennent des arcs tout-égaux.

Second Cas.

XXVII. Les angles équilateres & égaux sont isocordes. C'est la converse du même premier Lemme.

Troi-

Troisiéme Cas.

Les angles isocordes & égaux sont équilateres entr'eux. Car il est aisé de voir par le 3.e Lemme que les cordes égales ne peuvent soûtenir des arcs égaux, que dans les mêmes cercles, ou en des cercles égaux. XXVIII.

II. Theoréme.

Quand il n'y a égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrive: XXIX.

Premier Cas.

N'y ayant égalité que dans les côtez, les plus grandes cordes donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grandes cordes. C'est le 2.d Lemme. XXX.

Second Cas.

N'y ayant égalité que dans les cordes, les plus grands côtez donnent les plus petits angles, & les plus petits angles ont les plus grands côtez. C'est le 3.e Lemme. XXXI.

Troisiéme Cas.

N'y ayant égalité que dans la grandeur des angles, les plus grandes cordes donnent les plus grands côtez, & les plus grands côtez ont les plus grandes cordes. C'est le 4.e Lemme. XXXII.

I. Probleme.

Couper en deux un angle donné. L'ayant pris isoscele, il ne faut qu'en couper la corde perpendiculairement & par la moitié, ce qui se fait XXXIII.

de

de la même sorte. Car alors l'arc sera partagé par la moitié, par VII. 7.

II. PROBLEME.

XXXIV. AYANT un point donné dans une ligne donnée, en élever une qui fasse sur cette ligne un angle égal à un donné. Soit l'angle donné. L'ayant fait isoscele, en marquer la corde; puis du point donné dans la ligne pris pour centre, décrire d'un intervalle égal aux côtez de l'angle donné une portion de circonference, dans laquelle, en commençant par le point où cette circonference coupera la ligne donnée, on prendra une corde égale à la corde de l'angle donné. La ligne menée du point donné à l'extremité de cette corde satisfera au Probleme. Car ces deux angles seront équilateres entr'eux & isocordes, & par consequent égaux par le premier Theoréme.

DE LA TROSIE'ME MESURE DE L'ANGLE,

QUI EST LE SINUS.

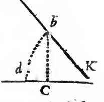
XXXV. LE sinus de l'arc qui mesure un angle, peut être appellé le sinus de cét angle. D'où il s'ensuit:

XXXVI. 1. QUE comme il n'y a que les arcs moindres que la moitié de la demy-circonference qui ayent un sinus, il n'y a aussi que les angles aigus qui en ayent. Ce qui n'empêche pas qu'on ne se puisse servir des sinus pour comparer ensemble deux angles obtus, en mesurant par les sinus les angles aigus qui sont les complemens de ces obtus. Voyez VII. 18.

XXXVII. 2. IL s'ensuit que toute ligne menée d'un point de l'un des côtez d'un angle aigu perpendiculairement sur l'autre côté, est le sinus de l'arc qui me-

mesure cét angle, & par conséquent le sinus de cét angle.

Car soit K le sommet d'un angle aigu, & que de *b*, point quelconque de l'un de ses côtez, soit menée sur l'autre la perpendiculaire *b* C. Je dis que *b* C est le sinus de l'arc qui mesure cét angle. Car ayant prolongé K C jusques en *d*, en sorte que K *d* soit égale à K *b*; si du centre K, intervalle K *b*, on décrit un cercle, l'arc de ce cercle compris entre *d* & *b* sera la mesure de cét angle. Or *b* C est le sinus de cét arc, par VII. 12. Donc *b* C est le sinus de l'arc qui mesure l'angle K, & par conséquent de l'angle K.



3. Il s'ensuit que le côté d'un des points duquel est menée la perpendiculaire sur l'autre côté, consideré depuis le sommet jusques à ce point, comme K *b*, peut être appellé le rayon de cét angle, parce qu'il est le rayon du cercle dont l'arc le mesure. Et l'autre côté depuis le point où tombe la perpendiculaire ou *sinus*, peut être appellé *l'anti-sinus*, qui est toûjours égal au rayon moins le *sinus verse*, D'où il s'ensuit: XXXVIII.

4. Que la grandeur du sinus reglant toûjours celle du sinus verse, (comme il a été montré VII. 17.) elle regle toûjours aussi celle des *anti-sinus*, quoique par rapport au rayon, puisque *l'anti-sinus* n'est autre chose que le rayon moins le *sinus verse*; de sorte que dans deux angles differens les rayons & les sinus ne sçauroient être égaux que les *anti-sinus* ne le soient aussi. XXXIX.

Tout cela supposé, soient considerez les Lemmes suivans.

I. LEMME.

XL. QUAND on dit que deux angles qu'on veut mesurer par les sinus ont le rayon égal, c'est de même que si l'on disoit qu'ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux; & s'ils ont le rayon inégal, par des arcs de cercles inégaux.

II. LEMME.

XLI. DANS les cercles égaux les arcs égaux ont des sinus égaux, & les sinus égaux donnent des arcs égaux. VII. 16.

III. LEMME.

XLII. DANS les cercles égaux les plus grands arcs ont les plus grands sinus, & les plus grands sinus donnent les plus grands arcs. VII. 16.

IV. LEMME.

XLIII. DANS les cercles inégaux les arcs étant égaux, ceux des plus grands cercles ont les plus grands sinus. VII. 21.

V. LEMME.

XLIV. DANS les cercles inégaux les sinus étant égaux, ceux des plus grands cercles donnent des arcs proportionellement plus petits, c'est à dire de moins de degrez. C'est une suite claire du Lemme precedent.

I. THEORÉME.

XLV. TROIS égalitez peuvent être considerées dans les angles que l'on compare & que l'on mesure par les sinus.

1. L'éga-

1. L'égalité des rayons.
2. L'égalité des sinus.
3. L'égalité des angles mêmes.
Or deux étant données donnent la 3.^e

PREMIER CAS.

LES angles qui ont le rayon égal & le sinus égal sont égaux. 1.er & 2.^d Lemme. XLVI.

SECOND CAS.

LES angles égaux qui ont le rayon égal, ont le sinus égal. 1.er & 2.^d Lemme. XLVII.

TROISIÉME CAS.

LES angles qui sont égaux & qui ont le sinus égal, ont le rayon égal. Car s'ils avoient le rayon inégal, ils seroient mesurez par des arcs de cercles inégaux : & par consequent (selon le 5.e Lemme) les sinus égaux donneroient des arcs proportionellement inégaux, & ainsi les angles ne pourroient pas être égaux. XLVIII.

II. THEORÉME.

N'Y ayant égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrivera : XLIX.

PREMIER CAS.

N'Y ayant égalité que dans le rayon, les plus grands sinus donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grands sinus. 3.e Lemme. L.

SECOND CAS.

N'Y ayant égalité que dans les sinus, le plus grand LI.

grand rayon donne le plus petit angle, & le plus petit angle a le plus grand rayon. 5.me Lemme.

TROISIÉME CAS.

XII. N'y ayant égalité que dans les angles, le plus grand rayon donne le plus grand sinus, & le plus grand sinus donne le plus grand rayon. 4.e Lemme.

DES ANGLES FAITS PAR LES LIGNES

ENTRE PARALLELES.

XIII. COMME les perperpendiculaires entre les paralleles font des angles droits sur l'une & sur l'autre (ce qui est toujours la même chose :) il n'y a que les angles que font les obliques à considerer.

Mais ces obliques entre parelleles faisant d'une part un angle aigu & de l'aurre un obtus, c'est l'aigu que l'on mesure premierement, & par l'aigu on connoist l'obtus. Et ainsi quand nous parlerons d'angles égaux, nous entendrons les aigus, & les obtus par consequence seulement.

Or dans la consideration de ces angles aigus faits par des obliques entre paralleles,

L'oblique est le rayon de l'angle;

La perpendiculaire menée de l'extremité de l'oblique (qui est un point de l'une des paralleles) sur l'autre parallele en est le sinus.

D'où il s'ensuit, que les sinus qui mesurent les angles que font des obliques entre les mêmes paralleles sont tous égaux, parce que les perpendiculaires entre les mêmes paralleles sont égales. V. I. 16.

Com-

Comme aussi entre differentes paralles, pourveu que les deux paralleles d'une part soient autant distantes l'une de l'autre, que celles de l'autre part. Et c'est ce qu'on peut appeller deux espaces paralleles égaux.

On peut tirer de là diverses propositions importantes qui ne seront que des Corollaires du 1.er ou du 2.d Theoreme.

I. COROLLAIRE.

TOUTE oblique entre deux paralleles fait les angles alternes sur ces paralleles égaux, c'est à dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, & par consequent l'obtus à l'obtus. LIV.

Car ces angles alternes ont pour rayon cette même ligne oblique *b* C, & pour sinus l'un la perpendiculaire de *b* sur la parallele X, & l'autre la perpendiculaire de C sur la parallele Z. Or ces deux perpendiculaires sont égales. Donc par 46. S.

II. COROLLAIRE.

LES obliques égales entre les mêmes paralleles font les angles égaux: par la même raison. LV.

III. COROLLAIRE.

LES obliques entre paralleles qui font les angles égaux, sont égales, S. 48. LVI.

IV. COROLLAIRE.

LES plus co[illegible] lignes entre paralleles font les plus grands angles; par le 2.d Theoréme, 2.d Cas. LVII.

V. Co-

V. COROLLAIRE.

LVIII. QUAND des lignes ſont enfermées entre differentes lignes paralleles, on peut y conſiderer trois égalitez.

1. L'égalité des obliques.

2 L'égalité des angles.

3. L'égalité de la diſtance entre les unes & les autres de ces paralleles, ce qui fait que cette diſtance étant égale, les perpendiculaires entre ces differentes paralleles ſont égales.

Or deux de ces égalitez étant données donnent la troiſiéme.

1.[er] CAS. Si les obliques ſont égales, & les angles qu'elles font entre leurs paralleles égaux, les unes & les autres paralleles ſont également diſtantes. Car ce ſont des angles qui ſont égaux, & qui ont les rayons égaux (ſçavoir ces obliques.) Donc leurs ſinus ſont égaux, par 47. S.

Or ils ont pour ſinus les perpendiculaires entre leurs paralleles.

Donc ces perpendiculaires ſont égales.

2.[d] CAS. Si les obliques ſont égales, & les paralleles de part d'autre également diſtantes, les angles ſeront égaux, par 46. S.

3.[e] CAS. Si les paralleles de part & d'autre ſont également diſtantes, & que les angles ſoient égaux, les obliques ſont égales, 48. S.

VI. COROLLAIRE.

LIX. LA même ligne coupant obliquement pluſieurs paralleles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'eſt à dire qu'elle fait ſur toutes les angles aigus égaux. C'eſt une ſuit[illegible]remier Corollaire & de 14. S.

Soient trois lignes paralleles x, y, z, coupées par la ligne B en C, en D & en f. L'angle aigu vers C au

au dessus d'x est égal à l'angle aigu de dessous, parce qu'ils sont opposez au sommet. (17. *sup.*) & l'angle aigu de dessous est égal à l'angle aigu vers D, au dessus d'y, parce qu'ils sont alternes, (54. *sup.*) & ce dernier est égal à laigu de dessous y, parce qu'il sont opposéz au sommet. Et ce dernier à l'aigu vers f, au dessus de z, parce qu'ils sont alternes, & ainsi des autres. Donc tous les angles aigus que fait une même ligne sur diverses paralleles qu'elle coupe, sont égaux. Et de là il s'ensuit, que les obtus sont égaux aussi, parce que les aigus sont les complemens des obtus.

VII. Corollaire.

Plusieurs paralleles étant également distantes les unes des autres, c'est à dire la 1.re de la 2.de & la 2.de de la 3.e & la 3.e de la 4.e &c. LX.

Si une même ligne les coupe toutes, toutes les portions de cette ligne comprises entre deux de ces paralleles sont égales.

Car tous les angles aigus que fait cette ligne sur ces paralleles sont égaux. Et les sinus de ces angles, qui sont les perpendiculaires entre chaques deux paralleles, sont égaux aussi par l'hypothese.

Donc les rayons de ces angles, qui sont les portions de cette ligne comprises entre chaques deux paralleles, sont égaux. (48. *sup.*)

VIII. Corollaire.

Lors que deux lignes sont menées d'un même point sur une autre ligne, c'est comme si ces lignes étoient entre paralleles. LXI.

Car

Car on peut par ce point tirer une parallele à la ligne que ces deux lignes coupent.

IX. COROLLAIRE.

LXII. TOUT angle plus les deux angles que font ses côtez sur la base sont égaux à deux droits.

Soient *b* C & *b* D les côtez d'un angle, & CD la base. Par le precedent Corollaire, on peut mener par le point *b* la ligne *m n*, parallele à la base, sur laquelle parallele les côtez de de l'angle donné feront de nouveaux angles autour du donné, sçavoir l'angle *m b* C, & *n b* D. Or ces trois angles sont égaux à deux droits, par 15. S. Et chacun des deux qui sont à côté de l'angle donné, est égal à un de la base, sçavoir à son alterne, par 54. S.

Donc les deux de la base, plus l'angle donné, sont égaux à deux droits.

X. COROLLAIRE.

LXIII. SI on prolonge un côté d'un angle vers le sommet de l'angle, comme si on prolongeoit D *b* jusques en *f*: l'angle que fait ce côté prolongé sur l'autre côté, comme l'angle *f b* C, est égal aux deux angles sur la base. Car cét angle, qui est appellé exterieur, plus l'angle du sommet, vallent deux droits. Or les deux angles sur la base, plus l'angle du sommet vallent aussi deux droits. Ostant donc l'angle du sommet qui est commun, l'angle exterieur sera égal aux deux angles sur la base.

Ce sera la même chose si on prolonge la base. Car l'angle exterieur que fera la base prolongée sur un côté,

côté, sera égal aux deux interieurs opposez; c'est à dire à l'angle que fait l'autre côté sur la base, plus l'angle du sommet.

XI. Corollaire.

Deux angles sont égaux, quand les angles que les côtez de l'un font sur sa base, sont égaux à ceux que les côtez de l'autre font sur la sienne. LXIV.

III. Probleme.

D'un point donné hors une ligne donnée, mener une ligne qui fasse sur la donnée un angle donné. LXV.

D'un point quelconque de la ligne donnée en élever une qui fasse sur la donnée l'angle donné, (par le 2.d Probleme, 34. *sup.*)

La parallele à cette ligne qui passera par le point donné & coupera la ligne donnée, satisfera au Probleme.

DE LA QUATRIE'ME MESURE DE L'ANGLE,

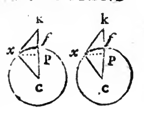
qui est generalement la Base.

Cette mesure est la plus imparfaite, & ne peut servir à mesurer les ang'es, qu'en cas que les côtez de deux angles non isosceles soient égaux chacun à chacun, ce qui fera deux Theorémes.

I. Theoréme.

Lors que deux angles non isosceles sont équilateres entr'eux, c'est à dire que chacun des côtez de l'un est égal à chacun des côtez de l'autre: si la base est égale à la base, ces angles sont égaux. LXVI.

L C'est



C'est ce qui se prouve ainsi : Ou l'on peut faire tomber une perpendiculaire de l'extremité de l'un des côtez de ces angles sur l'autre côté, ou on ne le peut, comme lors qu'ils sont obtus.

1er. CAS. Si on le peut, (comme lorsque les angles sont k c x :) les perpendiculaires x P seront égales, par V. 58.

Or ces perpendiculaires sont les sinus de ces angles qui ont aussi le rayon égal, sçavoir c x. Donc ces angles sont égaux, par 46. S.

2.d CAS. Si on ne le peut, (comme si ces angles étoient c x k des mêmes figures :) alors la perpendiculaire x P menée du sommet même de chacun des angles sur la base, feroit voir que les deux angles formez par les côtez de chacun de ces angles obtus sur cette base, sont égaux chacun à chacun, (c'est à dire l'angle k égal à l'angle k, & l'angle c à l'angle c.) Donc les angles obtus c x k seront égaux, par 64. S.

II. THEORÉME.

LXVII. DEUX angles égaux étant équilateres entr'eux, ont la base égale.

Ces angles égaux que l'on suppose équilateres entr'eux sont,

1. Ou droits.
2. Ou aigus.
3. Ou obtus.

1. 1.er. CAS. S'ils sont droits, comme *b f* C & *n p m* : ils ont les bases C *b* & *m n* égales, par V. 48.

2.d CAS.

2.[d] CAS. S'ils sont aigus, comme *b d* C, *n q m*: les perpendiculaires C *f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales, par 47.S.

Donc *f d* = *p q*. V. 51.
Donc *b f* = *n p*. I. 19.
Donc C *b* = *m n*. V. 48.
Ce qu'il falloit demontrer.

3.[e] CAS. S'ils sont obtus, comme *b g* C, & *n o m*: les angles aigus C *g f*, *m o p*, complemens de ces obtus, seront égaux.

Donc les perpendiculaires C *f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales par 47.S.
Donc *g f* = *o p*. V. 51.
Donc *b f* = *n p*. I. 18.
Donc C *b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demontrer.

OBSERVATION,

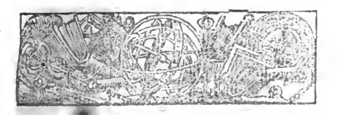
Touchant la comparaison de la premiere mesure des angles avec ces trois dernieres.

Nous avons déja dit qu'il n'y avoit que l'arc qui fust la mesure parfaite & naturelle de l'Angle. Mais pour le mieux voir, il faut remarquer que les trois autres mesures montrent bien si un angle est égal à un angle, ou, entre des angles inégaux, quel est le plus grand ou quel est le plus petit; mais il n'y a que l'arc qui donne la veritable proportion entre les angles inégaux. Car il est certain que si l'arc est triple, ou quadruple, ou quintuple de l'arc: l'angle sera aussi triple, quadruple, ou quintuple de l'angle. Mais cela ne se peut pas dire des trois au-

autres mesures : étant faux que si la corde est triple de la corde, lors même que les angles sont équilateres entr'eux, l'angle soit triple de l angle ; parceque les cordes ne sont pas proportionelles à leurs arcs, comme il a été dit VII. 22. *Et c'est d'où vient la difficulté de la trisection de l'Angle ; parce qu'il ne suffit pas pour cela de couper la corde en trois, ce qui seroit facile : mais il faut couper l'arc en trois ; ce qui ne se peut par la Geometrie ordinaire, c'est à dire en n'y employant que des lignes droites & circulaires.*



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE NEUFVIE'ME.

Des Angles qui ont leur sommet hors le centre du Cercle, dont les Arcs ne laissent pas de les mesurer.

IL est bien aisé de reconnoître que les Angles ne peuvent avoir pour veritable mesure que les arcs d'un cercle, & que toutes les autres mesures, comme les cordes, les sinus, & les bases, ne peuvent être que subsidiaires de celle là, & que même elles ne les mesurent qu'imparfaitement.

Mais on a creu jusques icy qu'on ne pouvoit employer pour mesurer un angle que les arcs du cercle au centre duquel est le sommet de cét angle. Et

 aussi

ainsi arrivant rarement que deux angles que l'on compare ayent leur sommet au centre du même cercle: on ne pouvoit presque jamais employer la mesure des arcs dans la comparaison de plusieurs angles, & on étoit obligé d'avoir recours à de longs circuits par la conference de plusieurs triangles; ce qui obligeoit à considerer tant de lignes, qu'il étoit impossible que l'Imagination n'en fût extrémement fatiguée, qui est une des choses qu'on doit éviter autant que l'on peut dans l'étude de la Geometrie.

Cependant il est vray qu'il n'y a point d'angle qu'on ne puisse mesurer par les arcs d'un cercle, en quelque endroit qu'en soit le sommet au regard du cercle: C'est à dire,

1. Soit qu'il soit dans la circonférence du cercle:

2. Soit qu'il soit au dedans, quoi qu'ailleurs qu'au centre:

3. Soit mêmes qu'il soit au dehors, pourveu que ses côtez coupent ou touchent le cercle.

C'est ce que l'on verra par ce Livre, qui ne servira pas seulement à mesurer avec une merveilleuse facilité toutes sortes d'angles, mais donnera aussi par là de grandes ouvertures pour trouver beaucoup de nouvelles choses touchant la proportion des lignes.

Mais pour rendre les preuves plus courtes, il est bon de supposer quelques Lemmes, ou clairs d'eux mêmes, ou démontrez dans le Livre precedent, afin d'y renvoyer quand on en aura besoin.

I. Lemme. Definition.

11. Lors que dans toutes ces sortes d'angles on dit qu'un tel arc du cercle auquel ils ont rapport leur sert de mesure: cela veut dire, que si ce même angle étoit au centre du cercle, il auroit cét arc, ou

ou un autre qui lui seroit égal, pour sa mesure. On bien cela veut dire, qu'un angle qui seroit au centre de ce cercle, & qui auroit cét arc pour mesure, seroit égal à l'angle hors le centre qu'on dit avoir cét arc pour sa mesure.

Et de là il s'ensuit, que dans ces sortes d'angles, aussi bien que dans ceux qui sont au centre du cercle, deux angles sont égaux quand ils ont pour mesure des arcs égaux: ou absolument, quand ce sont des arcs du même cercle, ou de cercles égaux: ou proportionellement, quand ce sont des arcs de cercles inégaux; l'arc du petit ayant la même raison à sa circonference, que l'arc du grand à la sienne: comme si l'un & l'autre étoit la dixiéme partie de sa circonference, c'est à dire de 36 degrez.

II. Lemme.

Tout angle qui a pour mesure la Moitié { de la demy-circonference est *Droit*. III.
d'un arc moindre que la demy-c. *Aigu*.
d'un arc plus grand que la demy-c. *Obtus*.

Et de là il s'ensuit, que quand on dit que deux angles, ou trois angles, sont égaux à deux droits: cela veut dire que ces deux angles, ou ces trois angles, pris ensemble, ont pour mesure la demy-circonference, c'est à dire 180 degrez.

Et quand on dit que deux angles sont égaux à un droit: cela veut dire que ces deux angles, pris ensemble, ont pour mesure la moitié de la demy-circonference, c'est à dire 90 degrez.

III. Lemme.

Quand un tout est partagé en plusieurs portions, comme *A* en *b*, *c*, *d*; comme ces trois portions ensemble font le tout: les trois moitiez de IV.

ces portions, c'eſt à dire une moitié de chacune, ſont toutes enſemble la moitié du tout ; de ſorte que ces trois expreſſions ſont la même choſe:

La moitié du tout;

La moitié des trois portions que comprend le tout;

Les trois moitiez de ces portions, c'eſt à dire une de chacune; ce qui s'entend toûjours, quoi qu'on ne le marque pas.

Et ainſi ſuppoſant qu'*A* ſoit une circonference, & que *b*, *c*, *d*, ſoient trois arcs qui la comprennent toute:

$\frac{1}{2}$ de l'arc *b*,
$\frac{1}{2}$ de l'arc *c*,
$\frac{1}{2}$ de l'arc *d*,

ſont égales, priſes enſemble, à la $\frac{1}{2}$ de la circonference, c'eſt à dire à la demy-circonference, ou à 180 degrez.

Et ſuppoſant qu'*A* ſoit une demy-circonference, & que *b* & *c* ſoient deux arcs qui la comprennent: deux moitiez de ces arcs, une de chacun, valent la moitié de la demy-circonference, c'eſt à dire 90 degrez.

Et alors on peut exprimer la moitié de l'un de ces arcs en deux manieres: ou par ſon propre nom, comme la $\frac{1}{2}$ d'un tel arc; ou par la moitié du tout dont il eſt portion, moins la moitié de l'autre arc.

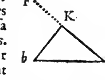
Ainſi étant donné une demy-circonference qui comprend les arcs *b* & *c*: la $\frac{1}{2}$ de l'arc *b* eſt la même choſe que la moitié de la demy-circonference, moins la $\frac{1}{2}$ de l'arc *c*.

Enfin ſi un tout a deux portions: la moitié de la plus grande, moins la moitié de la plus petite, eſt la même choſe que la moitié du tout moins la petite entiere. Car ſi le tout a pour portions *b* & *c*, la moitié du tout eſt égale à la moitié de *b*, plus la moitié de *c*. Il faut donc ôter deux fois

fois la moitié de *c* de la moitié du tout, pour rendre la moitié du tout égal à la moitié de *b* dont on auroit ôté la moitié de *c*.

IV. Lemme.

Enfin il se faut souvenir, v.



1. Que tout angle, plus les deux que font ses côtez sur sa base, sont égaux à deux droits.

2. Que les deux angles sur la base d'un angle droit sont égaux à un droit.

3. Que si on prolonge un côté de l'angle vers le sommet: le nouvel angle que fait ce côté prolongé sur l'autre côté, est égal aux deux angles qui sont sur la base du premier angle. Ainsi l'angle F K *b* est égal aux angles vers *b* & vers *c*.

La premiere sorte d'angles, dont le sommet est dans la circonference d'un Cercle donné.

Division.

Le sommet d'un angle ne se peut terminer dans la circonference d'un cercle qu'en 3 manieres: vi.

1. Quand l'un des côtez est au dedans du cercle, & l'autre au dehors;

2. Quand tous les deux sont au dedans;

3. Quand ils sont tous-deux au dehors du cercle. Mais parce que la premiere se subdivise en deux, on peut compter 4 genres de cette sorte d'angles.



Le 1.er Quand l'un des côtez est au dedans du cercle, & en est une corde, & que

 l'autre

l'autre côté qui est au dehors, touche le cercle.

Le 2.^d Quand l'un des côtez étant aussi au dedans du cercle, celui qui est au dehors coupe le cercle, & entre dans le cercle lorsqu'on le prolonge de ce côté-là : ou que ce n'est mêmes qu'une corde prolongée hors le cercle.

Le 3.e Quand tous les deux côtez sont au dedans du cercle, & en sont deux cordes.

Le 4.e Quand ils sont tous-deux au dehors.

Mais parce qu'alors cette sorte d'angle ne peut avoir de rapport au cercle, que parce qu'il seroit égal à un angle qu'on lui opposeroit au sommet, qui seroit necessairement ou du 1.er ou du 3.e genre : il ne sera point necessaire de rien dire de ce 4.e genre, puisqu'on en pourra juger par les autres.

Et ainsi il ne restera qu'à donner la mesure des trois premiers ; ce que nous ferons par trois Theorémes trés-clairs & trés-faciles, & dont même les deux derniers ne seront qu'une suite du premier : & en même temps si féconds, pour parler ainsi, qu'un trés-grand nombre de propositions qui ne se prouvent dans la Geometrie ordinaire que par des voyes trés obscures & trés embarassées, s'en déduiront sans peine, comme n'en étant que de simples Corollaires.

Mais pour cela, il est necessaire de marquer la maniere dont on exprime les angles du premier & du troisiéme genre dans la Geometrie ordinaire. Car pour celui du deuxiéme, personne ne les a encore considerez.

PRE-

PREMIER AVERTISSEMENT.

DEFINITIONS.

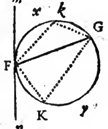
L'ANGLE du premier genre, qui est celui qui est compris entre une corde & une tangente, est appellé ordinairement ***angle du segment, angulus segmenti.*** VII.

Et l'angle du 3.e genre qui est compris entre deux cordes qui se terminent d'une part à un même point de la circonference, ***l'angle dans le segment, angulus in segmento.*** Ce que pour mieux entendre, il faut remarquer, que toute corde partage le cercle en deux portions, qui sont appellées ***segmens***, & que ces segmens sont égaux quand cette corde est un diametre, & alors on les appelle des demy-cercles, & l'arc de chacun est une demy-circonference:

Mais qu'ils sont inégaux, quand c'est une autre corde que le diametre, l'un étant plus petit que le demy-cercle, & l'autre plus grand. De sorte que pour abreger nous appellerons l'un ***le petit segment***, & l'autre ***le grand segment.***

Et delà il est clair que l'arc du petit segment est plus petit que la demy-circonference, & que l'arc du grand segment est plus grand que la demy-circonference.

Cela supposé, si on tire la corde F G, & au point F, la tangente *m n*: F *x* G est le petit segment, & F *y* G le grand segment.



Et l'angle G F *m*; l'angle du petit segment; parce que la tangente *m* F est du côté de ce segment-là.

Et l'angle G F *n*, l'angle du grand segment.

Mais l'angle F *k* G est l'angle dans le petit ſegment.

Et l'angle F K G, l'angle dans le grand ſegment.

II. AVERTISSEMENT.

VIII. ON peut encore remarquer qu'au regard de l'angle du ſegment, il faut que la corde qui diviſe les deux ſegmens ſoit décrite, parce qu'elle fait l'un des côtez de l'angle. Mais que cela n'eſt pas neceſſaire au regard de l'angle dans le ſegment, parce que la corde n'eſt que la baſe de cét angle, & qu'elle eſt ſuffiſamment marquée par les deux points de la circonference auxquels aboutiſſent les deux côtez de l'angle. Ainſi l'angle F K G eſt ſuffiſamment marqué, quoi que la ligne F G ne ſoit que ſous-entenduë & non tracée.

K x y F G Z

III. AVERTISSEMENT.

IX. L'ANGLE dans le ſegment ſe peut exprimer en deux manieres; ou par rapport au ſegment dans lequel il eſt inſcrit, ſon ſommet ſe trouvant dans l'arc de ce ſegment: ou par rapport à l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Et c'eſt en cette maniere qu'il vaut mieux l'exprimer, quand la corde qui joindroit les extrémitez de ſes côtez n'eſt pas marquée, comme dans l'angle F K G, qui eſt appuyé ſur l'arc F Z G; & alors on dit ſimplement que c'eſt un angle inſcrit dans le cercle, ſans parler de ſegment.

IV. AVER-

IV. Avertissement.

Il eſt aiſé de voir que l'angle inſcrit dans un ſegment eſt toûjours appuyé ſur l'arc du ſegment oppoſé. Et qu'ainſi l'angle dans le grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit ſegment : & au contraire l'angle dans le petit ſegment eſt appuyé ſur l'arc du grand. X.

V. Avertissement.

Enfin il faut remarquer, que quand on parle des arcs qui ſoûtiennent les côtez d'un angle inſcrit dans le cercle, on doit entendre les deux qui ſont à côté l'un de l'autre, qui ſe joignent ſeulement en un point, & qui avec celui ſur lequel l'angle inſcrit eſt appuyé comprennent toute la circonference. XI.

PREMIER THEORÉME,

FONDAMENTAL DE TOUS LES AUTRES.

Tout angle compris entre une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par cette corde du côté de la tangente. XII.

Et parce que cét angle eſt auſſi appellé l'angle du ſegment vers lequel eſt cette tangente : ſelon cela on doit dire, qu'il a pour meſure la moitié de l'arc de ce ſegment-là. De ſorte que ſi c'eſt l'angle du petit ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment ; & ſi c'eſt l'angle du grand ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

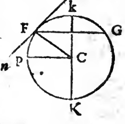
Ce Théoréme eſt le fondement de la meſure des angles par des arcs de cercles hors le centre

L 7 deſ-

quels est leur sommet, & la preuve en est trés-facile.

Soit la corde F G, & la ligne *m n* qui touche en F le cercle dont le centre est au point C. L'angle *m* F G est l'angle du petit segment, & *n* F G l'angle du grand.

Soit tiré le diametre *k* K perpendiculaire à F G; & le rayon C F; & P C perpendiculaire au diametre K *k*, & par consequent parallele à F G. Ce diametre *k* K coupera par la moitié les arcs du grand & du petit segment. (VII. 2. & 7.) D'où il s'ensuit que l'angle au centre F C k a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment. Et qu'au contraire l'angle F C K a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.



De sorte que le Theoréme sera demontré, (par le 1.er Lemme,) si on peut faire voir, que l'angle du petit segment *m* F G est égal à l'angle au centre F C *k*. Or cela est facile. Car C P & F G étant paralleles, les angles alternes que fait sur l'une & sur l'autre le rayon C F, (c'est à dire les angles P C F, & C F G,) sont égaux. (VIII. 54.)

Or l'angle *m* F C (qui comprend l'angle du petit segment & l'angle C F G,) est droit, (VII. 34.) & par consequent égal à l'angle P C *k*, qui est droit aussi, & qui comprend les deux angles F C *k* & P C F. Donc ôtant de part & d'autre les angles C F G & P C F, (que l'on vient de faire voir être égaux:) l'angle du petit segment demeurera égal à l'angle F C *k*, qui a pour mesure la moitié de l'arc de ce petit segment.

Donc l'angle du petit segment *m* F G, a aussi pour-

pour mesure la moitié de cét arc du petit segment. Ce qu'il falloit demontrer.

On fera voir de mêmes que l'angle du grand segment *n* F G est égal à l'angle au centre F C K, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

Car l'angle du grand segment comprend l'angle droit *n* F C & l'angle C F G. Et l'angle au centre F C K comprend aussi l'angle droit P C K & l'angle P C F.

Or les angles C F G & P C F sont égaux, comme il vient d'être dit. Donc étant ajoûtez chacun à un droit, ils rendent égaux l'angle du segment & l'angle au centre, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

Donc (par le 1.er Lemme) l'angle du grand segment a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

I. Corollaire.

L'angle du demy-cercle est droit. XIII.
Celui du petit segment est aigu.
Celui du grand, obtus
Cela est clair par le 2.e Lemme.

II. Corollaire.

Lorsque deux cercles, dont l'un est dans l'autre, se touchent, toutes les cordes menées du point de l'attouchement à la circonference du plus grand cercle soûtiennent des arcs proportionnellement égaux dans les deux cercles; c'est à dire que la ligne entiere soûtient dans le grand cercle un arc égal à celui que soûtient dans le petit la partie K *d* de cette même ligne. XIV.

K
m
d
b

Car

Car les angles *m* K *b* & *m* K *d* sont le même angle. Or l'un a pour mesure la moitié de l'arc *k b*, & l'autre la moitié de l'arc K *d*. (12. *Sup.*) Donc ces deux arcs sont proportionnellement égaux.

II. Theoréme.

XV. Tout angle dont le sommet est dans la circonference, & qui est compris entre une corde & la partie d'une autre corde prolongée hors le cercle du côté qu'elle est hors le cercle, a pour mesure la moitié des deux arcs qui sont à côté du sommet de cét angle, & qui sont soûtenus par les deux cordes, dont l'une est le côté de l'angle, & l'autre en fait l'autre côté par sa partie prolongée hors le cercle.

Soient les deux cordes K D & K G, dont K D soit prolongée en F hors le cercle; je dis que l'angle F K G a pour mesure la moitié des deux arcs K D & K G.

Car (par VII. 36.) soit tirée par le point K la tangente *m n* : l'angle F K G comprend les deux angles F K *n* & *n* K G. Or l'angle F K *n* est égal à l'angle *m* K D, (VIII. 17.) parce qu'il lui est opposé au sommet. Donc l'angle F K G est égal aux deux angles *n* K G & *m* K D.

Or, par le 1.er Theoréme, *n* K G a pour mesure la moitié de l'arc K G, & *m* K D a pour mesure la moitié de l'arc K D.

Donc l'angle F K G, qui est égal à tous les deux, a pour mesure l'une & l'autre moitié de ces deux arcs. C'est à dire la moitié de ces deux arcs, par le troisiéme Lemme.

Co-

COROLLAIRE.

SI l'on joint les extremitez de deux cordes par deux autres cordes qui se croisent, & que l'on prolonge hors le cercle les deux premieres cordes : les angles que le prolongement de chacune fera sur les cordes qui se croisent, seront égaux. XVI.

Soient les deux premieres cordes C *f* & *d* *g*.

Les deux qui se croisent, *f* *d* & *g* C.

Les prolongemens, K C & *k* *d*.

Je dis que les angles K C *g* & *k* *d* *f* sont égaux.

Car, par le precedent Theoréme, l'un & l'autre a pour mesure la moitié des arcs *f* C, C *d*, *d* *g*.

K k C d f g

III. THEORÉME.

TOUT angle inscrit au cercle, c'est à dire compris entre deux cordes qui ne se joignent que dans la circonference, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. XVII.

Et parce qu'on appelle aussi ces angles *angles dans le segment* : selon cela,

Tout angle dans un segment a pour mesure la moitié de l'arc du segment opposé. (*Voyez le* 4.*e* *Avertissement*, 10. *Sup.*)

La preuve en est trés facile par le premier Theoréme.

Soit l'angle *f* K *g*. Je dis qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *f* *g*.

Soit menée par le sommet K la tangente *m* *n* ; l'angle inscrit *f* K *g*, plus les deux qui sont à cô-

té

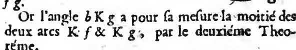
té *f* K *m* & *g* K *n*, valent deux droits. (VIII. 15.)

Donc ils ont pour mesure la demy-circonference, par le 2.e Lemme.

Donc ils ont pour mesure les trois moitiez des arcs *fg*, K*f*, K*g*, (par le 3.e Lemme,) parce que ces trois arcs comprennent toute la circonference.

Or l'un de ces trois angles, sçavoir *f* K *m*, a pour mesure la moitié de l'arc K *f*; & l'autre, sçavoir *g* K *n*, a pour mesure la moitié de l'arc K *g*. Donc il reste pour la mesure du 3.e qui est l'angle inscrit, la moitié du 3.e arc, qui est *f g*.

On peut encore prouver la même chose par le 2.d Theoréme. Car si on prolonge *f* K jusques à *b*: les angles *f* K *g* & *g* K *b* valent deux droits, (VIII. 14.) & par consequent ont pour mesure la moitié de la circonference, & par consequent aussi les trois moitiez des trois arcs K *f*, K *g*, *f g*.



Or l'angle *b* K *g* a pour sa mesure la moitié des deux arcs K *f* & K *g*, par le deuxiéme Theoréme.

Reste donc pour la mesure de l'angle inscrit la moitié du troisiéme arc, qui est *f g*.

I. COROLLAIRE.

XVIII. IL paroist par là, que si on ôte de la circonference entiere, c'est à dire de 360 degrez, les deux arcs que soûtiennent les côtez de l'angle inscrit,

ſcrit, la moitié de ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle inſcrit; comme ſi l'un de ces arcs eſt de 100 degrez, & l'autre de 44: ôtant 144 de 360, il reſtera 216, dont la moitié eſt 108 pour la meſure de l'angle inſcrit.

II. Corollaire.

Il paroiſt auſſi qu'on peut dire encore : Que tout angle inſcrit a pour meſure la demy circonference, moins la moitié des deux arcs qui ſont ſoûtenus par ſes côtez, ou moins l'arc qui eſt ſoûtenu par l'un de ſes côtez quand il eſt Iſoſcele. XIX.

Cela eſt clair par la démonſtration precedente, & par le troiſiéme Lemme.

Et cette meſure eſt ſouvent plus commode que l'autre; comme ſi l'on ſçait que des arcs que ſoûtiennent les côtez de l'angle inſcrit l'un eſt de 100 degrez, & l'autre de 44: ôtant 50 & 22, qui ſont 72, de 180, ce qui reſtera, qui eſt 108, eſt la meſure de cét angle inſcrit.

Et cela eſt encore plus facile quand l'angle inſcrit eſt Iſoſcele, comme ſi l'un & l'autre de ſes côtez ſoûtient un arc de 36 degrez; car ôtant 36 de 180, ce qui reſte, qui eſt 144, eſt la meſure de cét angle inſcrit.

III. Corollaire.

Tous les angles inſcrits dans le même ſegment, ou appuyez ſur le même arc, ou ſur des arcs égaux, ſont égaux. Car ils ont la moitié du même arc, ou de deux arcs égaux, pour meſure. Donc ils ſont égaux par le premier Lemme. XX.

Et il eſt clair auſſi (par le premier & le deuxiéme Corollaire,) que des angles inſcrits ſont égaux, quand les arcs que ſoûtiennent les deux côtez de l'un, ſont égaux, pris enſemble, aux arcs que ſoûtiennent

nent les deux côtez de l'autre ; & qu'il ne peuvent être égaux que cela ne soit.

Que si, au contraire, des angles inscrits sont supposez égaux, ils faut qu'ils soient appuyez sur des arcs ou tout-égaux, si c'est dans le même cercle ou en des cercles égaux que ces angles soient inscrits : ou qui ne sont que proportionellement égaux si c'est dans des cercles inégaux. Ce qu'il faut aussi supposer dans la premiere partie de ce Corollaire. Car les arcs qui ne sont que proportionnellement égaux sont autant pour l'égalité des angles, que s'ils étoient tout-égaux.

IV. COROLLAIRE.

XXI. Si deux angles inscrits en divers cercles sont égaux, & qu'ils soient soûtenus par des cordes égales, les cercles dans lesquels ils sont inscrits sont égaux.

Car les angles inscrits en divers cercles ne sçauroient être égaux, qu'ils ne soient appuyez sur des arcs proportionellement égaux ; & des arcs proportionellement égaux ne sçauroient être soûtenus par des cordes égales en divers cercles, que les cercles ne soient égaux. Donc, &c.

V. COROLLAIRE.

XXII. Lorsque deux cercles dont l'un est au dedans de l'autre se touchent, si du point de l'attouchement on méne deux lignes jusques à la circonference du plus grand : les arcs de l'une & de l'autre circonference compris entre ces deux lignes seront proportionnellement égaux. Car le même angle sera mesuré par la moitié de l'un & de l'autre de ces arcs.

VI. Co-

VI. COROLLAIRE.

SI un cercle a pour centre un point de la circonference d'un autre cercle, & que de ce point on tire deux lignes qui coupent l'une & l'autre circonference : des deux arcs compris entre ces deux lignes, celui de la circonference laquelle a ce point pour centre, est proportionellement égal à la moitié de l'autre, c'est à dire à la moitié de l'arc de celle dans laquelle est ce point. Car le même angle a pour mesure le premier arc entier & la moitié de l'autre. XXIII.

VII. COROLLAIRE.

SI l'angle inscrit & l'angle au centre sont appuyez sur le même arc, l'angle au centre est double de l'angle inscrit. Car l'inscrit a pour mesure la moitié de l'arc, qui entier est la mesure de l'angle au centre. XXIV.

VIII. COROLLAIRE.

TOUS les angles dans un segment sont égaux à l'angle du segment opposé. Et ainsi l'angle dans le grand segment est égal à l'angle du petit segment ; & l'angle dans le petit segment est égal à l'angle du grand. XXV.

Car l'angle dans le grand segment est appuyé sur l'arc du petit. Donc il a pour mesure la moitié de l'arc du petit, qui est aussi la mesure de l'angle du petit segment.

IX. Co-

IX. COROLLAIRE.

XXVI. L'ANGLE dans le demy-cercle est droit.
Dans le grand segment, aigu.
Dans le petit, obtus.
Cela est clair par le deuxiéme Lemme.

X. COROLLAIRE.

XXVII. Les angles inscrits en deux segmens opposez sont égaux à deux droits. Car les arcs des deux segmens comprennent toute la circonference. Donc la moitié de l'un, qui est la mesure de l'un de ces angles, plus la moitié de l'autre, qui est la mesure de l'autre angle, valent la demy-circonference, (par le troisiéme Lemme.) Donc pris ensemble ils ont pour mesure la demy-circonference. Donc ils valent deux droits.

XI. COROLLAIRE.

XXVIII. Si quatre cordes ne se joignent qu'aux extremitez, elles font quatre angles inscrits, dont les opposez sont égaux à deux droits. C'est la même chose que le precedent.

XII. COROLLAIRE.

XXIX. L'ANGLE aigu qui est dans le grand segment est le complement de l'obtus qui est dans le petit. Cela est clair, puisque les deux ensemble valent deux droits.

XIII. COROLLAIRE.

XXX. La moitié de la base d'un angle inscrit est son sinus, s'il est capable d'en avoir, c'est à dire s'il est aigu : ou de son complement, s'il est obtus. Car le sinus est la moitié de la corde du double de

de l'arc. (VII. 15.) Or la baſe d'un angle inſcrit eſt la corde d'un arc qui eſt double de celui qui meſure l'angle inſcrit. Donc la moitié de cette corde *eſt ſon ſinus*, s'il eſt aigu : ou s'il eſt obtus, *le ſinus* de ſon complement, c'eſt à dire de l'angle aigu, qui étant inſcrit dans le ſegment oppoſé, a auſſi cette corde pour ſa baſe.

XIV. COROLLAIRE.

ON dit qu'un ſegment eſt capable d'un tel angle, quand tous les angles dans ce ſegment ſont égaux à cét angle. XXXI.

Et quand cela eſt, il eſt impoſſible qu'un angle de cette grandeur ait pour baſe la corde de ce ſegment, que ſon ſommet ne ſe trouve dans un des points de l'arc du ſegment.

Suppoſons par exemple que le ſegment A ſoit capable de l'angle K ; je dis que tout angle égal à l'angle K, qui aura *b* C pour baſe, aura ſon ſommet dans un des points de l'arc du ſegment A.

Car s'il l'avoit au dedans du cercle, comme en *d* : prolongeant C *d* juſques en *f*, point de la circonference, & tirant la ligne *b f*, l'angle *b f* C ſera égal à l'angle K, par l'hypotheſe. Or l'angle *b d* C, par le 4.[me] Lemme, eſt égal à l'angle *b f* C, plus l'angle *f b d*. Donc il eſt plus grand que le ſeul angle *b f* C. Donc il eſt plus grand que l'angle K.

Et ſi le ſommet étoit hors du ſegment, comme en *g* : tirant une ligne de *b* au point où C *g* coupe le cercle, comme à *f*, on prouvera que l'angle *b f* C, égal à K, ſera plus grand que l'angle

gle *b g* C, parce qu'il ſera égal à *b g* C plus *g b f*, par le quatriéme Lemme.

Donc l'angle qui a *b* C pour baſe ne peut être égal à K, qui eſt l'angle dont le ſegment A eſt capable, qu'il n'ait ſon ſommet dans la circonference; puiſque s'il l'avoit au dedans il ſeroit plus grand, & s'il l'avoit au dehors il ſeroit plus petit.

XV. COROLLAIRE.

XXXII. Si de l'hypotenuſe ou ſoutendante d'un angle droit on fait le diametre d'un cercle, le ſommet de cét angle droit ſe trouvera dans la circonference du cercle.

Car chaque demy-cercle eſt capable de cét angle droit. (26. *ſup.*) Donc, par le Corollaire precedent, nul angle droit ne peut avoir pour hypotenuſe la corde du demy-cercle, c'eſt à dire le diametre, que ſon ſommet ne ſe trouve en un des points de la demy-circonference.

XVI. COROLLAIRE.

XXXIII. Si du ſommet d'un angle on tire une ligne au milieu de la baſe, & que cette ligne ſoit égale à la moitié de cette baſe, l'angle eſt droit; mais ſi elle eſt plus longue, il eſt aigu; & ſi elle eſt plus courte, il eſt obtus.

Car faiſant un demy-cercle qui ait pour centre le point du milieu de la baſe, & pour intervalle la moitié de la baſe: le ſommet de l'angle ſe trouvera dans un des points de la demy-circonference, ſi la ligne tirée du ſommet au milieu de la baſe eſt égale à la moitié de la baſe. Donc l'angle ſera droit.

Et le ſommet ſe trouvera au dehors du demy-cercle, ſi elle eſt plus longue. Donc l'angle ſera plus

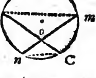
plus petit qu'un droit par le neufviéme Corollaire, & par consequent aigu.

Et il se trouvera au dedans du demy-cercle si elle est plus courte. Donc l'angle sera plus grand qu'un droit par le neufviéme Corollaire. Donc il sera obtus.

XVII. Corollaire.

Quand deux cordes égales se coupent, chaque partie de l'une est égale à chaque partie de l'autre. XXXIV.

Soient les cordes égales BC & *mn*, qui se coupent en *o*. Les arcs B *n* C & *m* C *n* sont égaux, (V. 26.) parce qu'ils sont soûtenus par des cordes égales. Donc ôtant de ces deux arcs l'arc *n* C, qui leur est commun, les arcs B *n* & *m* C demeurent égaux. Donc tirant la ligne *n* C, les angles inscrits *n* C B & C *n m* sont égaux, (20. *sup.*) parce qu'ils sont appuyez sur des arcs égaux. Donc les deux lignes *o n* & *o* C sont égales, parce qu'étant menées d'un même point elles font des angles égaux sur la même base. (VIII. 48.) Et on prouvera de mêmes, en tirant la ligne B *m*, que *o m* & *o* B sont égales. Donc chaque partie de l'une de ces cordes est égale à chaque partie de l'autre.



I. Probleme.

Trouver l'angle droit dont on a l'hypotenuse & la distance du sommet à l'hypotenuse. XXXV.

Elever de l'extremité de l'hypotenuse une perpendiculaire égale à cette distance, & tirer par l'autre extremité de cette perpendiculaire une parallele à l'hypotenuse.

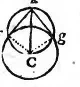
L'un des deux points où cette parallele coupera le cercle qui aura l'hypotenuse pour diametre, ou le point de l'attouchement, si elle le touche, sera le sommet de cét angle droit qui en determinera les côtez.

Car la distance étant donnée de ce sommet à l'hypotenuse, il ne se peut trouver ailleurs (d'un côté) qu'en quelqu'un des points de cette parallele; & parce que cét angle est supposé droit, il faut par le 15.e Corollaire que le sommet se trouve aussi en quelqu'un des points de la demy-circonference. Donc en un des points où elle la coupe, ou en celui auquel elle le touche.

II. Probleme.

XXXVI. D'un point hors le cercle tirer les tangentes au cercle, & montrer qu'on n'en peut tirer que deux, & qu'elles sont égales.

Soit k le point hors le cercle, & C le centre du cercle. Joindre ces points par une ligne. Décrire le cercle qui aura cette ligne pour diametre; il coupera le premier en deux points comme *f* & *g*. Enfin les lignes k*f* & k*g* étant tirées, elles toucheront le premier cercle en *f* & en *g*, sans qu'on en puisse tirer d'autres, & elles seront égales.



Car l'angle que l'une & l'autre fait avec le rayon du premier cercle est droit, (26. *sup.*) parce qu'il est dans un demy-cercle.

Et il ne peut y avoir que ces deux lignes tirées du point k qui touchent le cercle; parce que le sommet de l'angle droit, qui doit avoir pour côtez la tangente tirée de k & un rayon du premier cercle,

cercle, doit être en un point commun aux circonferences des deux cercles. Car ce sommet doit être dans la circonference du premier cercle, à cause qu'un rayon du premier est un de ses côtez; & dans celle du second, à cause que tous les angles droits qui ont le diametre du second cercle pour hypotenuse doivent avoir leur sommet dans la circonference de ce second cercle. (32. *sup.*)

Or il n'y a que les points *f* & g qui soient communs aux deux cercles. Donc on ne peut tirer de k que les deux tangentes k *f* & k g.

Et il est clair qu'elles sont égales, puis qu'elles soûtiennent des arcs égaux dans la circonference du nouveau cercle. (V. 26.)

III. PROBLEME.

DANS un cercle donné couper un segment qui soit capable d'un angle donné. XXXVII.

Ayant tiré une tangente au cercle, la corde qui fera avec cette tangente au point de l'attouchement un angle égal à l'angle donné, satisfera au Probleme. Car cét angle égal au donné sera l'angle d'un segment. Donc il sera égal à tout angle inscrit dans l'autre segment. (25. *sup.*) Donc cét autre segment sera capable de l'angle donné. (31. *sup.*)

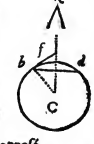
IV. PROBLEME.

TROUVER le cercle dont le segment terminé par une ligne donnée soit capable d'un angle donné. XXXVIII.

Soit la ligne donnée *b d*, & l'angle donné *k*; soit tirée *b f* qui fasse sur *b d* un angle égal à l'angle k.

Soit élevé du point *b* une perpendiculaire à *b f*;

& qu'il y ait une autre perpendiculaire à *b d* qui coupe *b d* par la moitié ; le point C, où je suppose que ces deux perpendiculaires se rencontreront, sera le centre du Cercle qui aura C *b* ou C *d* pour intervalle, & *f b* pour tangente.



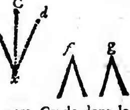
Donc le segment opposé à celui vers lequel est *f b* sera capable d'un angle égal à l'angle *f b d*, par le 8.ᵉ Corollaire, parce que l'un sera l'angle du segment, & l'autre l'angle dans le segment opposé.

V. Probleme.

XXIIX. Connoissant qu'elle est la distance de trois points l'un de l'autre, comme de *b*, C, *d*, & ne sçachant d'un 4.ᵉ comme *x*, sinon de quel côté il est à l'égard de ces trois-là, & qu'elle est la grandeur de l'angle compris entre les lignes *x b* & *x* C, & celui qui est compris entre les lignes *x* C & *x d* : trouver ce 4.ᵉ point.

Les lignes *b* C & C *d* sont données par l'hypothese.

Et les angles donnez soient *f* & g.



Trouver par le Probleme precedent le Cercle dont le segment terminé par *b* C, tourné vers *x*, soit capable de l'angle *f*.

Et trouver de même un autre Cercle dont le segment terminé par C *d* & tourné vers *x*, soit capable de l'angle g.

Ces deux Cercles se couperont en deux points, dont l'un sera C par la construction, & l'autre *x* ; ce qui se prouve ainsi :

Les

Les deux angles bxC, & Cxd, dont la grandeur est connuë, ont leur sommet au même point.

Or par le 14.e Corollaire l'angle égal à *f* ayant *b* C pour base, ne peut avoir son sommet ailleurs que dans un des points de l'arc du segment qu'on a trouvé être capable de l'angle *f*. Et par la même raison l'angle égal à *g* ayant C *d* pour base, ne peut aussi avoir son sommet ailleurs que dans un des points de l'arc du segment qu'on a trouvé être capable de l'angle *g*. Donc il faut que ce point, qui est le sommet de tous les deux angles, soit commun à tous les deux Cercles. Donc il faut que ce soit l'un des deux points où ils se coupent. Or il est bien visible que ce n'est pas le point C. Donc l'autre point où ils se coupent est le point *x* que l'on cherchoit.

I I.

Des Angles dont le sommet est au dedans du Cercle & ailleurs qu'au centre.

Quand le sommet d'un Angle est au dedans du Cercle, mais ailleurs qu'au centre, comme peut être l'angle K, ses côtez doivent toûjours être considerez comme terminez par la circonference, comme aux points *f* & *g*; & de plus il les faut aussi prolonger au delà du sommet jusques à la circonference de l'autre part, en prolongeant par exemple *f* K jusques en C, & *g* K jusques en *d*. XL.

Et ainsi ces angles se reduisent aux angles qui se font dans la section de deux cordes qui se coupent au dedans du Cercle, où il se fait quatre angles dont les opposez sont égaux, & qui sont appuyez chacun sur l'un des quatre arcs

d C K f g

auxquels cette circonference se trouve divisée par ces deux cordes.

Voicy donc le Theoréme qui nous apprendra la mesure de ces angles :

IV. THEORÉMÉ.

XLI. TOUT Angle fait par la section de deux cordes qui se coupent au dedans du Cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé.

Soient les deux cordes *c f* & *d g* qui se coupent en K. Prenons lequel on voudra des quatre angles qu'elles font en se coupant, comme *f* K *g*; je dis qu'il aura pour sa mesure la moitié de l'arc *f g* plus la moitié de l'arc opposé *d c*.

Soient joints les points *d*, *f*; l'angle *f* K *g* est égal aux deux angles vers *d* & vers *f*, (par le quatriéme Lemme.)

Or l'angle vers *d*, a pour mesure la moitié de l'arc *f g* sur lequel il est appuyé : (17. *sup.*) & l'angle vers *f* la moitié de l'arc *c d*, par la même raison.

Donc l'angle *f* K *g* qui leur est égal, a pour sa mesure les moitiez de ces deux mémes arcs ; ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

XLII. QUAND deux cordes égales, moindres que des diametres, se coupent, elles divisent la circonference en quatre arcs, dont il y en a deux opposez qui sont égaux, & deux autres inégaux ; & alors les angles qui sont appuyez sur chacun de ces arcs égaux ont pour mesure cét arc entier.

Car les opposez étant égaux, un entier est la même chose que la moitié de l'un plus la moitié de l'autre.

Je

Je ne prouve point ce qui est supposé dans ce Corollaire, parce que c'est une suite visible de ce qui a été demonstré *sup.* 34.

III.

Des Angles dont le sommet est hors le Cercle que leurs côtez coupent ou touchent.

Les côtez d'un Angle dont le sommet est hors le Cercle peuvent XLIII.

Ou le couper tous-deux:

Ou le toucher tous-deux:

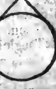
Ou l'un le couper & l'autre le toucher.

Mais quand ils le coupent, on les considere toûjours comme entrans dans le Cercle selon sa convexité, & étant terminez par la circonference au dedans du Cercle selon sa concavité.

C'est pourquoy ces angles sont toûjours considerez comme étant appuyez sur deux arcs du Cercle, l'un concave & l'autre convexe.



Quand les deux côtez le coupent, l'arc concave est celuy qui est compris entre les deux points de la circonference où les deux côtez sont terminez. Et le convexe est celuy qui est compris entre les deux points par où ils entrent dans le Cercle.



Quand tous les deux côtez touchent le Cercle, l'un & l'autre est compris entre les deux points de l'attouchement; mais l'un est concave au regard de l'angle, & l'autre convexe.

Et quand l'un touche & l'autre coupe le Cercle, le concave est compris entre le point de l'attouchement & celuy où se termine l'autre côté; & le convexe entre le point de l'attouchement & celuy où l'autre côté entre dans le Cercle.

Il étoit necessaire de bien expliquer ces deux sortes d'arcs, parce que de là dépend la mesure des angles dont il s'agit, selon ce Theoréme:

V. Theoréme.

XLIV. Lors que le sommet d'un Angle est hors le Cercle, soit que ses deux côtez coupent le Cercle, ou que tous-deux le touchent, ou que l'un le coupe & l'autre le touche: il a pour mesure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.

Preuve dans le premier Cas.

Soit l'angle K, dont le côté Kf coupe le Cercle en C, & K g en d; l'arc concave est fg, & le convexe Cd. Il faut donc prouver que cét angle a pour mesure la moitié de l'arc fg, moins la moitié de l'arc Cd, & on le prouve ainsi:

Soit tirée la ligne fd. Par le 4e. Lemme, l'angle fdg est égal à l'angle K, plus l'angle Kfd.

Donc l'angle K est égal à l'angle fdg, moins l'angle Kfd: Donc il doit avoir pour mesure la mesure de l'angle fdg, moins la mesure de l'angle Kfd.

Or la mesure de l'angle fdg est la moitié de l'arc concave fg sur lequel il est appuyé; & la mesure de l'angle Kfd est la moitié de l'arc convexe Cd.

Donc

Donc l'angle K a pour meſure la moitié de l'arc concave *fg*, moins la moitié de l'arc convexe C *d*.

PREUVE DU SECOND CAS.

Soit l'angle K, dont les côtez K *f* & K *g* touchent le cercle, & ſoit K *g* prolongée juſques en *h*.

L'angle *f g h* eſt égal à l'angle K plus l'angle K *f g*. Donc l'angle K eſt égal à l'angle *f g h*, moins l'angle K *f g*.

Or l'angle *f g h* a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment *f g*, & l'angle K *f g* a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment *f g*. (12. *ſup.*) Donc l'angle K, a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment, qui eſt l'arc concave, moins la moitié de l'arc du petit ſegment, qui eſt l'arc convexe.

La preuve du troiſiéme Cas eſt ſemblable à ces deux-là, tenant quelque choſe de l'un & de l'autre. Il vaut mieux la laiſſer trouver.

AVERTISSEMENT.

Outre cette meſure qui eſt generale à toutes ces ſortes d'angles, il y en a qui ſont particulieres à quelques-uns qu'il eſt bon de marquer par des Theorémes particuliers.

VI. THEORÉME.

UN Angle ayant ſon ſommet hors le Cercle, ſi l'un de ſes côtez qui coupe le Cercle ſe termine à l'extremité d'un diametre auquel l'autre côté eſt perpendiculaire, ſoit en coupant le Cercle, ſoit XLV.

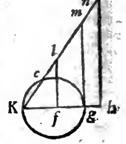
 en

en le touchant, soit mêmes étant hors le Cercle, ce diametre y étant prolongé: en tous ces cas, cét Angle a pour sa mesure la moitié de l'arc que soûtient la partie de son côté non perpendiculaire au diametre.

Il ne sera pas inutile de donner ce Theoréme pour exemple des diverses voyes que les principes qu'on a établis peuvent fournir pour demontrer une même chose.

PREMIERE DEMONSTRATION.

XLVI. Soit le diametre K g prolongé jusques à *h*. Soit de K tirée une ligne indefinie qui coupe le cercle en *c*.



Soient de divers points de cette ligne hors le Cercle comme de *l*, *m*, *n*, tirées sur le diametre les perpendiculaires *l f*, *m g*, *n h*. J'ai à prouver que chacun de ces angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'arc *c* K. Ce qu'on peut faire en cette maniere:

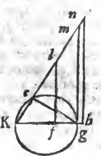
Chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, plus l'angle vers K, valent un angle droit par le 4.e Lemme, parce que ce sont les angles sur la base d'un angle droit. Donc chacun de ces angles, plus l'angle vers K, ont pour mesure la moitié de la demy circonference. Donc ils ont aussi pour mesure, par le 3.e Lemme, les deux moitiez des deux arcs *c* K & *c g*, qui comprennent la demy-circonference.

Or l'angle vers K a pour sa mesure la moitié de l'arc *c g* sur lequel il est appuyé.

Reste donc pour la mesure de chacun des autres la moitié de l'arc *c* K. Ce qu'il falloit demontrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

SOIT encore tirée la ligne *c g*. L'angle K *c g* XLVII.
est droit, (26. *sup.*) parce qu'il est dans le demy-cercle. Donc l'angle *c g* K est égal à chacun des angles vers *l*, *m*, *n*: puisque chacun de ces angles, plus l'angle vers K, sont aussi égaux à un droit.



Or l'angle *c g* K a pour mesure la moitié de l'arc *c* K, sur lequel il est appuyé.

Donc la moitié de cét arc *c* K est aussi la mesure de chacun des angles vers *l*, *m*, *n*.

TROISIÉME DEMONSTRATION.

SOIT tirée la ligne *c d* qui coupe perpendicu- XLVIII.
lairement le diametre, ce qui fera que les arcs K *c* & K *d* seront égaux. (VII. 2. & 7.) Et la ligne *c d* étant parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, les angles que font ces paralleles sur la même ligne aux points *c*, *l*, *m*, *n*, sont égaux. (VIII. 59.

Or l'angle K *c d* a pour sa mesure la moitié de l'arc K *d* égal à l'arc K *c*. Donc chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'un ou l'autre de ces deux arcs qui sont égaux, K *d* & K *c*. Donc on peut dire qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc *c* K. Ce qu'il falloit demontrer.

QUATRIÉME DEMONSTRATION.

XLIX. C'EST l'application de la demonstration du Theoréme general à ce cas particulier.

Je suppose que la perpendiculaire L *f* coupe le Cercle en *p* & en *q*. Par la demonstration du Theoréme general, l'angle L a pour mesure la moitié de son arc concave K *q*, moins la moitié de son arc convexe *e p*.

Or l'arc concave K *q* est égal aux deux arcs K *e*, & *e p*.

Donc la moitié de l'arc K *q* est la même chose que la moitié de l'arc K *e*, plus la moitié de l'arc *e p*, par le 3.e Lemme.

Donc la moitié de l'arc K *q*, moins la moitié de l'arc *e p*, est la même chose que la moitié de l'arc K *e*.

Donc la moitié de l'arc K *e* est la mesure de l'angle L. Ce qu'il falloit demontrer.

CINQUIÉME DEMONSTRATION.

L. AYANT tiré la tangente P K, cette tangente sera parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, qui sont perpendiculaires au diametre. Donc l'angle P K C, est égal aux angles vers *l*, *m*, *n*. (VIII. 54.) Or l'angle P K C a pour sa mesure la moitié de l'arc K C, (par 12. *sup.*) Donc chacun des autres angles vers *l*, *m*, *n*, aura aussi pour sa mesure la moitié de ce même arc. Je croi que cette demonstration est la meilleure de toutes.

DES

DES ANGLES DONT LES DEUX COSTEZ

TOUCHENT LE CERCLE.

IL est bon d'en dire quelque chose en particulier, outre ce qu'on en a dit en general. II.

On les peut appeller *des Angles circonscrits.*

Et voicy une nouvelle maniere de les mesurer :

VII. THEORÉME.

L'ANGLE circonscrit au Cercle, c'est à dire dont les deux côtez touchent le Cercle, a pour mesure la demy-circonference, moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé. III.

PREMIERE DEMONSTRATION.

SOIT l'angle K, à qui soit donnée pour base la ligne *bd*, qui joint les deux points d'attouchement. L'angle K, plus les deux angles sur sa base, sont égaux à deux droits, c'est à dire ont pour mesure, pris ensemble, la demycirconference. (VIII. 62.)

Or les deux angles sur la base ont chacun pour mesure la moitié de l'arc convexe *bd*, par le 1.er Theoréme.

Donc la mesure des deux est cét arc convexe tout-entier.

Donc ôtant cét arc convexe de la demycirconference, ce qui restera sera la mesure de l'angle K circonscrit au Cercle; ce qu'il falloit demontrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

PAR la demonſtration generale l'angle K a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe. (44. *Sup.*) Or ces deux arcs comprennent toute la circonference. Donc, par le 3.ᵉ Lemme, la moitié de toute la circonference, moins l'arc convexe entier, eſt la même choſe que la moitié de l'arc concave, moins la moitié du convexe.

I. COROLLAIRE.

LIII. DEUX angles circonſcrits ſont égaux quand ils ſont appuyez ſur des arcs convexes d'autant de degrez, & le plus grand eſt celuy qui eſt appuyé ſur un arc de moins de degrez.

Car ſi de 180 degrez on ôte un nombre égal, ce qui reſte eſt égal, & plus le nombre qu'on en ôte eſt petit, plus ce qui reſte eſt grand. Donc &c.

II. COROLLAIRE.

LIV. SI un angle circonſcrit eſt appuyé ſur un arc convexe qui ſoit ſoûtenu par le côté d'un angle inſcrit iſoſcele, l'angle inſcrit & le circonſcrit ſont égaux.

Car ôtant cét arc de la demy-circonference, ce qui reſtera ſera la meſure du circonſcrit par 52. S. & de l'inſcrit par 19. S.

III. COROLLAIRE.

LV. IL eſt bon de conſiderer toûjours les côtez de l'angle circonſcrit comme terminez au point de l'attouche

touchement. Et suivant cela il faut dire que tout angle circonscrit est isoscele: car les deux tangentes au Cercle menées du même point sont toûjours égales, par VII. 39.

IV. Corollaire.

La ligne menée du sommet de l'angle circonscrit au centre divise toûjours cét angle par la moitié. Et l'on peut appeller ces deux moitiez de l'angle circonscrit *des demy-angles circonscrits*. LVI.

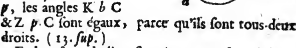
K b d C

Car si on tire deux rayons aux points d'attouchement, on ne pourra considerer ces deux demyangles, qu'on ne voye sans peine que les côtez de l'un sont égaux aux côtez de l'autre; & que les rayons du même Cercle, & par consequent les sinus, en sont égaux. Donc ils sont égaux. (VIII. 46.)

V. Corollaire.

Les angles circonscrits au même Cercle sont égaux, quand les tangentes de l'un sont égales aux tangentes de l'autre. LVII.

Soit K *b* tangente de l'angle K égale à Z *p*, tangente de l'angle Z. Je dis que les angles K & Z sont égaux. Car tirant les lignes du centre K C & Z C, & les rayons C *b* & C *p*, les angles K *b* C & Z *p* C sont égaux, parce qu'ils sont tous-deux droits. (13. *sup.*)



Et les côtez de l'un sont égaux aux côtez de l'autre, puisque par l'hypothese K *b* est égale à Z *p*, &

& que que C *b* & C *p* sont les rayons du même Cercle.

Donc les bases K C & Z C de ces angles sont égales. (VIII. 67.)

Donc les angles *b* K C & *p* Z C sont égaux, (VIII. 66.) les côtez de l'un étant égaux aux côtez de l'autre, & ayant les deux rayons pour leurs bases.

Or ces deux angles *b* K C & *p* Z C sont chacun la moitié de chaque angle circonscrit, par le Corollaire precedent.

Donc les angles circonscrits sont égaux : ce qu'il falloit demontrer.

VI. Corollaire.

LVIII. Les angles circonscrits au même Cercle sont égaux, quand leur sommet est également éloigné du centre ; & les plus petits sont ceux dont le sommet en est plus éloigné.

Cela est facile à prouver par les demy angles circonscrits, & je le laisse à trouver à ceux qui commencent, pour faire essay de leurs forces.

Recapitulation de la mesure des Angles.

LIX. Le sommet de l'angle est

Dans le Cercle	Au centre.		1
	Hors le centre.		2.
Dans la Circonf.	L'un des côtez au dedans du Cercle,		
	Et l'autre au dehors,	le touchant.	3.
		le coupant.	4.
	Tous-deux au dedans du Cercle.		5.

Hors

Hors le Cercle
- Les deux côtez le coupant. 6.
- Les deux le touchant. 7.
- L'un le coupant, & l'autre le touchant. 8.
- Et mêmes l'un le coupant & étant terminé à l'extremité du diametre, & l'autre étant hors le Cercle, mais perpendiculaire à ce diametre prolongé. 9.

ET CES ANGLES ONT POUR MESURE,

1. L'arc sur lequel il est appuyé. VIII. 10.
2. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé. IX. 41.
3. La moitié de l'arc que soûtient le côté qui est au dedans du cercle. IX. 12.
4. La moitié de l'arc que soûtient le côté qui est au dedans du Cercle, plus la moitié de celui que soûtient le prolongement du côté qui est hors le Cercle. IX. 15.
5. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. IX. 17.

6. 7. 8. } La moitié de l'arc concave sur lequel il est appuyé, moins la moitié de l'arc convexe. IX. 44.

7. La demy-circonference, moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé. IX. 52.

8 & 9. La moitié de l'arc soûtenu par la partie du côté non perpendiculaire au diametre. IX. 45.

NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DIXIE'ME.

DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

I. *A proportion des lignes dépend de deux choses, des paralleles & des angles; & ainsi elle n'a pû se bien traiter qu'apres l'explication de l'une & de l'autre. Et mêmes pour en bien comprendre tout le mystere, il faut reprendre beaucoup de choses des paralleles, que nous proposerons en forme de Lemmes.*

I. Lemme. Definition.

II. Un espace compris d'une part entre deux paralleles & indefiny de l'autre, soit appellé *espace parallele*.

II. Lem-

II. LEMME. DEFINITION.

COMME on ne considere dans ces espaces que la *distance* entre les parelleles, leur grandeur dépend de cette distance qui est mesurée par les perpendiculaires comprises entre ces paralleles, que nous appellerons pour cette raison ***les perpendiculaires des espaces.*** III.

Et delà il s'ensuit que ces espaces sont égaux quand les perpendiculaires de l'un sont égales aux perpendiculaires de l'autre.

III. LEMME. DEFINITION.

ON dit qu'une ligne est dans un espace parallele quand elle est terminée par les paralleles qui le terminent, comme la ligne ***b*** est dans l'espace A. IV.

On dit qu'une ligne est parallele à un espace quand elle l'est aux lignes qui le terminent, comme la ligne *b* est parallele à l'espace **A**.

IV. LEMME.

L'INCLINAISON d'une ligne dans un espace se considere par l'angle aigu qu'elle fait sur l'une & l'autre parallele, le faisant toûjours égal. V.

D'où il s'ensuit que deux lignes sont également inclinées dans le même espace, ou dans deux espaces differens, quand les angles aigus que fait l'une sont égaux aux angles aigus que fait l'autre.

Et que la moins inclinée est celle qui fait son angle aigu moins aigu & plus approchant du droit.

V. LEMME IMPORTANT.

LORSQUE deux ou plusieurs lignes sont menées VI.
d'un

d'un même point sur la même ligne, elles sont censées être dans un même espace parallele. (VIII. 61.) Car il ne faut alors que concevoir une ligne menée par ce point commun, qui soit parallele à celle qui les termine. D'où il s'ensuit que les côtez d'un angle terminez par une base sont toûjours censez être dans le même espace parallele.

VI. Lemme.

VII. Deux angles soient appellez semblables, lors qu'étant égaux, les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun.

Et on est asseuré que cela est; 1. quand on sçait qu'ils sont égaux, & qu'un des angles sur la base de l'un est égal à l'un des angles sur la base de l'autre: car delà il s'ensuit que l'autre est égal aussi.

2. Lors qu'étant égaux il sont de plus Isosceles.

VII. Lemme.

VIII. Quand les sommets de deux angles sont également distans chacun de sa base, (prolongée s'il est besoin,) ces deux angles peuvent être compris dans le même espace parallele. Car mettant ces deux bases sur une même ligne, la ligne qui passera par les deux sommets sera parallele à celle qui comprendra les deux bases.

VIII. Lemme.

IX. Dans le même espace parallele, ou dans les espaces paralleles égaux, toutes les également inclinées sont égales, & toutes les égales sont également inclinées. VIII. 56.

Et au contraire les espaces paralleles sont égaux quand les également inclinées y sont égales. Car delà

là il est certain que les perpendiculaires le sont aussi. VIII. 58.

IX. Lemme.

Lors qu'une même ligne est coupée par plusieurs lignes toutes paralleles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les paralleles qui les renferment. VIII. 59. X.

X. Lemme.

Lors qu'il y a proportion entre quatre lignes, on dit que deux de ces lignes sont proportionelles aux deux autres lignes; quand les deux antecedens de la proportion se trouvent dans les deux premieres, & les deux consequens dans les deux dernieres. D'où il s'ensuit qu'*Alternando*, on peut prendre aussi les deux premieres pour les deux termes d'une raison, & les deux dernieres pour les termes de l'autre. (II. 36.) XI.

PROPOSITION FONDAMENTALE

des Lignes proportionelles.

Lors que deux lignes sont également inclinées en deux differens espaces paralleles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces; & leurs éloignemens du perpendicule sont aussi en même raison. XII.

Soient deux espaces A & E.

Soient appellées dans l'espace A.

La perpendiculaire, P.

L'oblique, C.

L'éloignement du perpendicule B.

Et

Et soient de même appellées
dans l'espace, E.
La perpendiculaire p.
L'oblique c.
L'éloignement du perpendicule b. Je dis que

$$P. p. :: C. c. :: B. b.$$

Et en voilà la preuve tres-naturelle, dont je ne croi pas que jamais personne se soit avisé:

Soit P divisée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. Et ces aliquotes quelconques de P soient appellées x.

Si on tire par tous les points de cette division quelle qu'elle soit, des paralleles à l'espace A, cét espace sera divisé en autant de petits espaces paralleles qu'x sera dans P. Et ces petits espaces seront égaux par le 2e. Lemme, parce qu'ils auront tous x pour perpendiculaire.

Et de là il s'ensuit que C sera aussi divisée en aliquotes pareilles à celles de P; parce que les portions de C qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y étant également inclinées par le 9e. Lemme, y sont égales par le 8.e

Soient donc les aliquotes de C pareilles à celles de P appellées y.

Que si de tous les points de division de C on tire des paralleles à P, (qui seront par consequent perpendiculaires à l'espace,) elles couperont encore B en aliquotes pareilles; parce que chaque y se trouvant également inclinée en chacun de ces nouveaux petits espaces, ils seront égaux par le 8.e Lemme. Et par consequent les portions de B; qui seront toutes perpendiculaires dans ces espaces égaux, seront égales. (Et cela mêmes seroit vrai quand elles n'y seroient pas perpendiculaires, pourveu qu'elles y fussent également inclinées. Ce qu'il faut remarquer pour une autre occasion.)

Cela

Cela étant fait, prenant x pour mesurer p de l'espace E, ou elle s'y trouvera précisément tant de fois, ou tant de fois plus quelque reste, c'est à dire *plus* une portion moindre qu'x. Et ainsi tirant des lignes paralleles à l'espace E par tous les points de la division de p mesurée par x, l'espace E se trouvera divisé en autant de petits espaces égaux entr'eux, & égaux à ceux qui ont eu la même x pour perpendiculaire dans l'espace A, qu'x se sera trouvée dans p, si ce n'est qu'il y en aura un plus petit, si x ne s'y est trouvée que tant de fois plus quelque reste. Car le petit espace où sera compris ce reste sera plus petit que les autres.

Et de là il s'ensuit que c étant aussi inclinée dans E que C dans A, les portions de c comprises dans ces espaces égaux à ceux d'A seront égales aux portions de C, & ainsi se pourront aussi appeller y; & s'il y avoit eu en p un reste moindre qu'x, il y auroit aussi eu en c un reste moindre qu'y.

Donc par la definition des grandeurs proportionnelles, (II. 33.)

P. p. :: C. c.

puisque x & y, aliquotes quelconques pareilles des deux antecedens P & C, sont également contenuës dans les deux consequens p & c; si dans l'un sans reste, dans l'autre sans reste, si dans l'un avec reste, dans l'autre avec reste.

On prouvera la même chose de B & de b. Car si c étant mesurée & divisée par y, on tire des paralleles à p (qui seront perpendiculaires à l'espace) par tous les points de la division, b sera divisée en autant de parties que c, & ces parties seront égales aux parties de B, que nous avons nommées z: si ce n'est qu'il y en aura une moindre que z, s'il y a eu un reste dans c moindre qu'y.

Donc les aliquotes pareilles de C & de B seront également contenuës dans c & b.

Donc C. c. :: B. b.

Donc

Donc P.*p* :: C.*c* :: B.*b*. Ce qu'il falloit demontrer

I. Theoréme.

XIII. Si deux lignes inégalement inclinées dans le même espace le sont autant chacune, que chacune de deux autres le sont dans un autre espace, les également inclinées sont en même raison.

Soient les espaces A & E.

Soit C autant inclinée dans l'espace A que *c* dans l'espace E.

Et D autant inclinée dans l'espace A que *d* dans l'espace E.

Je dis que C.*c*. :: D.*d*.

Car, par la Proposition precedente,

C est à *c*, comme la perpendiculaire d'A à la perpendiculaire d'E.

Or D est aussi à *d*, comme ces deux mêmes perpendiculaires.

Donc C.*c*. :: D.*d*. (II. 26.)

On le peut aussi prouver immédiatement & par soy-même sans avoir recours aux perpendiculaires, par la même voye dont on s'est servi dans la Proposition precedente, & que je ne repete point, parce qu'il est trés-facile de la trouver.

I. Corollaire.

XIV. Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallele, si elles sont toutes coupées par des paralleles à cét espace, elles le sont proportionellement ; c'est à dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la premiere, ou la deuxiéme, ou la troisiéme, &c. cõme chaqu'autre toute à la même p^re. 1. 2. 3. &c.

C'est

C'est une suite manifeste du precedent Theoréme, puisque d'une part toutes les toutes sont dans le même espace, qui est l'espace total ; toutes les premieres parties dans le 1.er espace partial ; les 2.des dans le 2.e, & ainsi des autres. Et que de l'autre, chaque toute & chacune de ses parties sont également inclinées chacune dans son espace, par le 9.e Lemme. Donc la 1.ere toute est à sa 1.ere partie, comme la seconde toute à sa 1.ere partie.

II. Corollaire.

Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une meme ligne, elles sont coupées proportionellement par toutes les lignes paralleles à celle qui les termine. XV.

C'est la même chose que le precedent Corollaire ; puisque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles se trouveront toutes dans le même espace parallele, & par consequent les paralleles à cét espace les doivent toutes couper proportionellement.

III. Corollaire.

Si deux lignes comprises dans un même espace parallele se coupent, elles sont coupées proportionellement ; c'est à dire que les parties de l'une sont proportionelles aux parties de l'autre : outre que la toute est à la toute, comme chaque partie à la même partie, suivant le même ordre dans lequel ces parties sont proportiomelles. XVI.

C'est encore la même chose que le 1.er Corollaire ; puisque menant une parallele à l'espace par

 le

le point de la section, ce seront deux lignes dans le même espace total qui sont coupées par une parallele à cét espace, & qui par consequent le doivent être proportionnellement.

IV. COROLLAIRE.

XVII. SI quatre lignes, dont les opposées sont paralleles, se joignent aux extremitez, elles font deux espaces paralleles, l'un d'un sens & l'autre de l'autre sens; & la ligne tirée de coin en coin s'appelle *diagonale.*

Que si d'un point quelconque de cette diagonale on tire deux lignes comprises chacune dans chacun de ces deux espaces, les parties de l'une de ces lignes seront proportionnelles aux parties de l'autre.

Car les deux parties de chacune sont proportionnelles aux deux parties de la diagonale, par le Corollaire precedent; parce que chacune de ces lignes & la diagonale sont comprises dans le même espace parallele & s'y coupent. Donc les parties de chacune étant en même raison que celles de la diagonale, les parties de l'une doivent aussi être en même raison que les parties de l'autre, puisque deux raisons égales à une 3.e sont égales entr'elles. (II. 26.)

II. THEORÉME.

XVIII. LORSQUE deux angles sont semblables, (c'est à dire selon le sixiéme Lemme, lorsqu'étant égaux, les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun:) les côtez sont proportionnels aux côtez, & la base à la base, & la hauteur à la hauteur. C'est à dire que les côtez de ces deux angles également inclinez chacun sur sa base, seront en même raison

que

que les deux autres côtez & que les deux bases, & que les distances de chaque sommet à chaque base : ce que j'appelle la hauteur de chaque angle.

Soient les deux angles nommez A & E.
Soit le grand côté d'A nommé C.
Le petit D.
La base B.
La hauteur H.
Et dans l'angle E,
Le grand côté *c*.
Le petit *d*.
La base *b*.
La hauteur *h*.

Je dis que C. *c*. : : D. *d*. : : B. *b*. : : H. *h*.

On le peut prouver facilement de la même sorte qu'on a prouvé la Proposition fondamentale, c'est pourquoi je ne le repete point.

Mais on le peut encore de cette autre sorte:

1.° Par le 5.e Lemme C & D sont censées être dans le même espace parallele, & de même *c* & *d*.

Et de plus par l'hypothese C & *c* sont également inclinées chacune dans son espace, & de même D & *d*.

Donc par la Proposition fondamentale, & par le 1.er Theoréme,

C. *c*. :: H. *h*.
D. *d*. :: H. *h*.

Donc C. *c*. :: D. *d*. & *alternando*, C. D. :: *c*. *d*.

2.° Par le 5.e Lemme C & B sont dans le même espace parallele, & de même *c* & *b*; & de plus C & *c* sont également inclinées chacune dans son espace, & de même B & *b*.

Donc par le 1.er Theoréme,

C. *c*. :: B. *b*. & *alternando*, C. B :: *c*. *b*.

3.° Par le même 5.[e] Lemme D & B ſont dans le même eſpace parallele, & de même ***d*** & ***b***.

Et de plus, D & ***d*** ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace, & de même B & ***b***.

Donc par le 1.[er] Theoréme,

D. ***d***. : : B. ***b***. & ***alternando***, D. B. : : ***d***. ***b***.

Donc $\left.\begin{matrix} C.\ c. \\ D.\ d. \end{matrix}\right\}$: : B. ***b***. Ce qu'il falloit demontrer,

I. COROLLAIRE.

XIX. DEUX angles Iſoſceles étant égaux, ils ſont ſemblables ; & par conſequent les côtez ſont aux côtez comme la baſe à la baſe, & la hauteur à la hauteur. Car deux angles étant Iſoſceles, ils ne peuvent être égaux que les ang'es ſur la baſe de l'un ne ſoient égaux aux angles ſur la baſe de l'autre, VIII. 62.

II. COROLLAIRE.

XX. SI un angle a deux baſes paralleles, il s'y trouvera diverſes ſortes de proportions de grand uſage.

Mais pour le mieux faire entendre, il faut conſiderer que les côtez de cét angle ſelon la derniere baſe comprennent ſes côtez ſelon la premiere ; & c'eſt pourquoy nous appellerons les uns ***toutes***, & les autres les premieres ou dernieres parties de chacune de ces toutes. Soient donc nommées

Les deux toutes T, & ***T***.
Les deux premieres parties p, & ***p***.
Les deux dernieres q, & ***q***.
La derniere baſe & la 1.[ere] B. & ***b***.

De plus tirant par le ſommet une parallele aux deux baſes, ils ſe trouvera trois eſpaces paralleles :

Le

Le total entre le sommet & B, que j'appelleray ω.

Le premier partial entre le sommet & *b*, A.

Le second partial entre *b* & B, E.

Cela étant, par le 9.e Lemme T est autant inclinée dans ω, que p dans A, & q dans E.

Et de mêmes *T* autant inclinée dans ω, que *p* dans A, & *q* dans E.

Donc, par le 1.er Theoréme,

1. T.p. : : *T.p.* & *alternando*, T.*T* : : p.*p*.
2. T.q. : : *T.q.* T.*T* : : q.*q*.
3. p.q. : : *p.q.* p.*p*. : : q.*q*.
4. Par le 2.e Theoréme chaque toute & sa premiere partie sont en même raison que la derniere base & la premiere.

T.p : : B.*b*. & *alternando*, T.B. : : p.*b*.
T.p : : B.*b*. *T*.B. : : *p*.*b*.

Car cét angle qui a deux bases paralleles doit être consideré comme si c'étoient deux angles égaux, dont l'un eût pour côtez & pour bases T, *T*, B: & l'autre p, *p*, *b*. Et ainsi les deux angles sur la base de l'un étant égaux aux deux angles sur la base de l'autre chacun à chacun, les côtez de l'un sont proportionnels aux côtez de l'autre, & les bases aussi. Et par consequent T.p. : : *T.p.* : : B.*b*.

III. Corollaire.

Lorsque deux angles ont leur sommet également distant de leur base, & que par consequent ils peuvent être compris dans le même espace parallele, (selon le 7e. Lemme:) si l'on donne à ces deux angles de nouvelles bases paralleles aux anciennes, & dont chacune en soit également distante, ces deux nouvelles bases seront proportionelles aux deux anciennes. XXI.

Supposons que les deux bases de ces deux angles, lesquelles j'appelleray B & *B*, soient sur la même ligne : la ligne qui joindra les sommets sera parallele à cette ligne. D'où il s'ensuit,

1°. Que considerant dans chacun de ces angles un seul côté, dont j'appelleray l'un T & l'autre *T*, ce seront deux lignes dans le même espace parallele.

2°. Que les deux nouvelles bases, que j'appelleray b & *b*, étant paralleles aux anciennes, & en devant être chacune également distantes, se trouveront necessairement dans la même ligne parallele à l'espace.

Donc, par le 1er. Corollaire du 1er. Theoréme, cette ligne parallele à l'espace coupe proportionnellement T & *T*; & ainsi appellant p la premiere partie de T, & *p* la premiere partie de *T*,

T.p. :: *T.p.*

Or, par le Corollaire precedent, chacun de ces angles ayant deux bases paralleles

T.p. :: B.b.

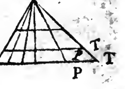
T.*p.* :: *B.b.*

Donc les deux raisons de B: b. & de *B.b.* sont égales, puisque chacune est égale à chacune des deux raisons T. p. & *T. p.* qui sont égales entr'elles. Donc

B.b. :: *B.b.* Donc *alternando*, B. *B*. :: b. *b*.

IV. Corollaire.

XXII. Si d'un même point on tire plusieurs lignes à la même ligne comprises entre la premiere & la derniere, & qu'on tire des paralleles à celle-là, qui soient aussi comprises entre la premiere & la derniere de ces lignes tirées du mé-



me-

me point: toutes ces paralleles seront coupées proportionnellement, c'est à dire que chaque toute & sa premiere partie seront en même raison que chaque autre toute & sa 1.re partie, & ainsi du reste.

Il suffit d'examiner deux de ces paralleles, comme est la derniere, que j'appelleray T, & sa premiere partie p; & une autre que j'appelleray *T*, & sa premiere partie *p*. Et ainsi il faut prouver que

T.p. :: *T*.*p*.

Et pour cela il ne faut que considerer, 1°. Que ces lignes tirées d'un même point font divers angles; que la premiere & la derniere font l'angle total, qui a toutes les paralleles entieres pour ses diverses bases; que la premiere & la seconde font le premier angle partial, qui a toutes les premieres parties de ces paralleles pour ses diverses bases, & ainsi du reste.

2.° Que tous ces angles sont dans le même espace parallele, parce qu'on peut tirer une ligne par leur sommet commun qui sera parallele à la derniere base de l'angle total.

Donc T étant la derniere base de l'angle total, & p la derniere base du 1.r angle partial, laquelle est partie de la ligne T; & *T* étant une autre base de l'angle total, *p* une autre base du 1er. angle partial: *T* & *p* seront aussi sur une même ligne parallele à l'espace; puisque *p* est partie de *T*.

Donc, par le Corollaire precedent, les deux dernieres bases T & p de ces deux angles seront en même raison que leurs deux autres bases *T* & *p*. Donc

T.p. :: *T*.*p*.

Donc par la même raison chaque parallele & sa 1.re partie seront en même raison que chaque autre parallele & sa 1re. partie.

Et on prouvera la même chose avec la même facilité



lité de chacune des autres parties, en comparant toûjours ensemble celles qui sont renfermées entre les deux mêmes lignes.

V. Corollaire.

XXIII. Si l'une de ces paralleles renfermées entre la 1re. & la derniere de plusieurs lignes tirées du même point est divisée par ces lignes en parties aliquotes, c'est à dire en un certain nombre de parties égales: toutes les autres sont divisées par les mêmes lignes en aliquotes pareilles.

C'est une suite manifeste du precedent Corollaire. Car si chaque partie de l'une de ces paralleles en est par exemple la dixiéme partie, il faut que chaque partie de chaque autre parallele en soit aussi la dixiéme partie; puisque chaque parallele & chacune de ses parties, sont en même raison que chaque autre parallele & chacune de ses parties semblables.

VI. Corollaire.

XXIV. Si un angle a plusieurs bases paralleles, toutes les lignes tirées du sommet qui couperont ces bases, les couperont proportionellement. D'où il s'ensuit qu'en quelques aliquotes que l'une de ces bases paralleles soit divisée, toutes les autres le seront en aliquotes pareilles.

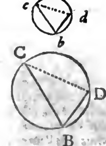
Ce n'est que les precedens Corollaires un peu autrement énoncez.

VII. Corollaire.

XXV. Les deux cordes d'un cercle sont proportionnelles aux deux cordes d'un autre cercle, si les arcs que soûtiennent les unes sont proportionnellement égaux aux arcs que soûtiennent les autres, chacun à chacun.

Soient considerées les deux cordes d'un cercle com-

comme jointes & faisant un angle inscrit: telles que sont *bc* & *bd* d'une part, & BC & BD de l'autre. (Car si elles ne faisoient pas d'angle inscrit dans chaque cercle, il ne faudroit qu'en prendre d'égales à celles là qui en fissent, puisque soûtenant des arcs égaux dans chaque cercle, par V. 26. ce sera la même chose pour juger de la proportion.) Cela supposé,



L'angle *c b d* inscrit dans le premier cercle est égal à l'angle C B D inscrit dans le second cercle, par IX. 20.

Et les angles que font les côtez *bc* & *bd* sur la base *dc*, sont égaux aux angles que font les côtez BC & BD sur la base DC, chacun à chacun, par IX. 20.

Donc par le 2.d Theoréme,

bc. BC. :: *bd*. BD. :: *dc*. DC.

VIII. Corollaire.

Si deux cordes de divers cercles soûtiennent des arcs proportionellement égaux, (c'est à dire d'autant de degrez,) elles sont proportionnelles aux diametres de ces cercles. XXVI.

C'est une suite du precedent. Car les diametres soûtiennent des arcs proportionellement égaux dans chaque cercle, puisqu'ils en soûtiennent la demy-circonference. C'est donc la même preuve & encore plus facile.

IX. Corollaire.

Si deux cordes égales de divers cercles soûtiennent chacune autant de degrez, les cercles sont égaux. Car par le precedent Corollaire elles sont en XXVII.

N 5 même

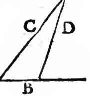
même raison que les diametres des cercles. Donc si elles sont égales, les diametres sont égaux. Donc les cercles sont égaux.

III. Theoréme.

XXVIII. Deux Angles quoy qu'inégaux ont neanmoins leurs côtez proportionnels, lorsque le côté de l'un sur sa base fait un angle égal à celui que fait aussi sur sa base l'un des côtez de l'autre ; & que l'autre côté du premier angle faisant sur sa base un angle obtus, & l'autre côté du second angle faisant un angle aigu sur la sienne, l'aigu est le complement de l'obtus, en sorte que tous les deux ensemble valent deux angles droits.

Cette derniere condition se peut encore exprimer en une autre maniere : qui est que ces deux côtez, l'un d'un angle & l'autre de l'autre, fassent chacun sur sa base le même angle aigu, mais que l'un le fasse en dehors sur le prolongement de la base, & l'autre en dedans sur la base même.

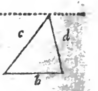
Cette derniere expression fait entrer plus facilement dans la demonstration de ce Theoréme.



Soient les deux angles, dont l'un ait pour côtez C & D, & pour base B. Et l'autre pour côtez *c* & *d*, & pour base *b*.

Je suppose, 1.° Que les angles que les côtez C & *c* font chacun sur leur base sont égaux.

2.° Que le côté D fait un angle obtus sur la base B, & *d* un angle aigu sur la base *b*, mais que cét aigu est égal au complement de cét obtus. D'où il s'ensuit



Que l'angle aigu que D fait sur la base en dehors en

en la concevant prolongée, eſt égal à l'angle aigu que *d* fait ſur la ſienne en dedans.

Cela étant, je dis que C. *c.* :: D. *d.*

Car ſoient faits des deux angles deux eſpaces paralléles, en prolongeant les baſes B & *b* autant qu'il eſt neceſſaire, & tirant par chacun des ſommets des paralleles à ces baſes. Et celuy de ces eſpaces dans lequel ſont C & D ſoit appellé A, & l'autre E.

Par l'hypotheſe l'angle aigu que fait C dans l'eſpace A eſt égal à l'angle aigu que fait *c* dans l'eſpace E.

Donc, par le 4.e Lemme, C & *c* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace.

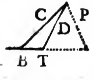
De mêmes, par l'hypotheſe, l'angle aigu que fait D dans l'eſpace A (ſur la baſe B prolongée) eſt égal à l'angle aigu que fait *d* dans l'eſpace E.

Donc, par le 4.e Lemme, D & *d* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace; & il n'importe que D ſoit autrement tournée au regard de *c*, car cela ne change en rien l'inclinaiſon de chacune dans ſon eſpace. Donc, par le 1.er Theoréme,

C. *c.* :: D. *d.* & *alternando*, C. D. :: *c.* *d.*

AUTRE DEMONSTRATION.

SI on tire du ſommet ſur la baſe B prolongée une ligne égale à D; l'angle aigu que cette ligne, que j'appellerai P, fera ſur B prolongée, ſera égal au complement de l'obtus que fait D ſur B, & par conſequent à l'aigu que fait *d* ſur *b*. XXIX.



Donc les deux angles dont l'un a pour ſes côtez C & P, & l'autre *c* & *d*, ſont ſemblables, par le 6.e Lemme.

Donc C. *c.* :: P. *d.*

Or par la conſtruction P eſt égale à D. Donc

C. *c.* :: D. *d.*

Avertissement.

XXX. *Cette derniere demonstration, quoi que moins bonne que la premiere, a cela d'utile, qu'elle fait voir plus clairement la difference qu'il y a entre ce 3.ᵉ Theoréme & le 2.ᵉ; qui est que dans le 2.ᵉ non seulement les côtez d'un Triangle sont proportionnels à ceux de l'autre, mais aussi la base: au lieu que dans celui-ci il n'y a que les côtez de proportionnels; étant bien clair que la base* B, *sur laquelle est l'angle obtus, doit être plus petite à proportion que la base b.*

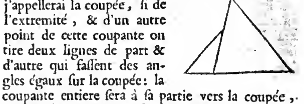
Car appellant T *la base* B, *prolongée jusques à* P, *il est clair que l'angle qui a pour côtez* C & P, & T *pour base, est semblable à l'angle qui a pour côtez c & d, & b pour base.*

Donc, par le 2.ᵉ Theoréme, $\left.\begin{matrix}C.\,c.\\P.\,d.\end{matrix}\right\}$ :: T. *b.*

Or B *n'est que partie de* T; *donc il n'y a pas la même raison de* B *à b, que de* C *à c.*

I. Corollaire.

XXXI. Une ligne, que j'appellerai la coupante, étant inclinée sur une autre, que j'appellerai la coupée, si de l'extremité, & d'un autre point de cette coupante on tire deux lignes de part & d'autre qui fassent des angles égaux sur la coupée: la coupante entiere sera à sa partie vers la coupée, comme la ligne tirée de son extremité à l'autre ligne tirée de son autre point.



J'en laisse à trouver la demonstration, qui n'est qu'une application du precedent Theoréme.

II. Co-

II. COROLLAIRE.

SI un angle a diverses bases diversement inclinées sur ses côtez : la ligne qui divisera cét angle par la moitié fera que les deux parties de chaque base seront proportionnelles aux deux côtez de cét angle selon cette base. Il suffira de le demontrer en une seule base. XXXII.

Soit un angle divisé par la moitié par la ligne *p*. Soit l'un de ses côtez appellé C & l'autre *c*; la partie de la base qui joint C appellée D, & l'autre *d*.

Si on tire par les extremitez de la base des paralleles à *p*, il y aura deux espaces paralleles.

Celui dans lequel sont C & D soit appellé A, & l'autre E. Par le 9.e Lemme D & *d* sont également inclinées chacune dans son espace.

Et par l'hypothese C & *c* sont aussi également inclinées chacune dans le sien, puisque les angles aigus que chacune fait sur *p* sont égaux.

Donc, par le 1.er Theoréme,

C. *c*. :: D. *d*. & *alternando*, C.D. :: *c*. *d*.

III. COROLLAIRE.

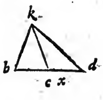
SI la ligne qui divise un angle en divise aussi la base proportionellement aux côtez, c'est à dire en sorte que les deux côtez de l'angle soient en même raison que les deux parties de la base, l'angle est divisé par la moitié. XXXIII.

C'est la Converse du precedent Corollaire, qui se prouve en cette maniere:

N 7 Soit

Soit l'angle *b k d* divisé par *k c*, en sorte que

b c. c d. :: k b. k d.



Si nous supposons que ce même angle est divisé par la moitié par *k x*, il s'ensuit par le precedent Corollaire que

b x. x d. :: k b. k d.

Donc *b x. x d. :: b c. c d.*

Donc *componendò*, *b d. x d. :: b d. c d.* (II. 47.)

Donc les point *x* & *c* ne sçauroient être que le même point, & *k x* & *k c* la même ligne. Donc *k c* divise l'angle par la moitié. Ce qu'il falloit demontrer.

I. Probleme.

XXXIV. Trouver une 4.e proportionelle. C'est à dire ayant la 1.re la 2.e & la 3.e de 4 lignes proportionelles, trouver la 4.e

Ou ayant les deux premiers termes d'une raison, & l'antecedent de la 2.e en trouver le consequent.

Le moyen le plus facile est de se servir pour cela du 2.e Corollaire du second Theoréme. (20. *sup.*) Et ainsi donnant les mémes noms aux trois données & à la 4.e qui est à trouver, j'appellerai

La 1re. p.
La 2e. q.
La 3e. *p.*
Et la 4e. à trouver, *q.*

Cela étant, il faut

1°. Mettre p & q sur une même ligne.

2°. Faire un angle de *p* la 3.e avec p la 1.re

3°. Joindre par *b* les extremitez de la 1.ere & de la 3.e

4.° Pro-

4°. Prolonger indefiniment *p* la 3.^e

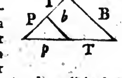
5°. De l'extremité de q la 2.e tirer B parallele à *b*, jusqu'à la rencontre de *p* prolongée.

Le prolongement de *p* jusqu'à la rencontre de B sera la 4.e que l'on cherche. Car il est clair par le Corollaire sus-dit (20. *sup.*) que

p. q. :: *p*: *q*.

ON peut encore faire la même chose d'une autre maniere, qui est de renfermer la plus petite des deux premieres données dans la plus grande : & alors la plus grande s'appellera T, & la plus petite, qui en est partie, p. XXXV.

Mais il faut prendre garde si la premiere des données est la plus petite ou la plus grande. Car si c'est la plus grande, il faudra commencer par T, & la 3.e sera aussi *T*. Et alors pour trouver *p*, qui sera la 4.e que l'on cherche: aprés avoir joint par B les extremitez de T & de *T*, *b* parallele à B étant tirée de l'extremité de p sur *T* donnera *p*. Car il est encor clair par le même Corollaire que



T. p. :: *T*. *p*.

Que si la 1.re des deux données est la plus petite, la 3.e sera *p*, & la 4.e à trouver sera *T*. De sorte qu'aprés avoir joint par *b* les extremitez de p & *p*, il faudra prolonger *p*; & tirant de l'extremité de T sur le prolongement de *p*, B parallele à *b*, on aura *T* pour la 4.e à trouver. Car par le même Corollaire (20. *sup.*) *permutando*,

p. T. :: *p*: *T*.

COROLLAIRE.

TROUVER une 3.e proportionelle; c'est à dire faire que l'une des deux données soit moyenne proportionelle entre l'autre donnée & la trouvée. XXXVI.

C'est

C'est la même chose que le precedent, excepté qu'une seule des deux données tient lieu de la 2.e & de la 3.^e

II. Probleme.

XXXVII. Trouver la ligne qui soit à une ligne donnée en raison donnée.

Soit la ligne donnée p; la raison donnée $m.\ n$; la ligne que l'on cherche x. Ainsi il faut trouver

$x.p. :: m.n.$

Or pour cela il ne faut que transposer les termes en commençant par n, & les mettant ainsi:

$n.m. :: p.x.$

& puis trouver x par le Probleme precedent. Ce qu'étant fait, on aura ce que l'on cherche; parce que si

$n.m. :: p.x.$

permutando

$x.p. :: m.n.$ Ce qu'il falloit demontrer.

III. Probleme.

XXXVIII. Diviser une ligne donnée en quelques aliquotes que l'on voudra.

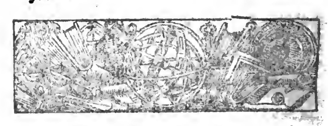
Soit D la ligne à diviser. Tirer au dessous ou au dessus une parallele indefinie que j'appellerai P. Prendre dans P autant de parties égales qu'on veut en avoir en la division de D, & prendre garde qu'elles soient notablement plus grandes ou plus petites que ne peuvent être celles de D. Puis des deux points entre lesquels sont comprises toutes les parties égales qu'on a prises dans P, tirer deux lignes par les extremitez de D, jusques à ce qu'elles se joignent en un point.

point. Toutes les lignes tirées de ce point là à tous les points de la division de P qui couperont D, la diviseront en autant de parties égales qu'on en aura pris dans P.

La preuve en est cy-dessus dans le 5.e Corollaire du 2.e Theoréme. (23. *sup.*)



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE ONZIE'ME.

DES LIGNES RECIPROQUES.



E Livre-cy sera encore de la proportion des Lignes, & contiendra plusieurs choses nouvelles que l'on jugera peut être plus belles & plus generales que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matiere des Proportions, en ne se servant que des lignes droites & des Cercles.

Pour les mieux faire entendre nous proposerons quelques Lemmes, qui feront voir aussi en quoi est different ce que l'on traite dans ce Livre de ce qui vient d'être traité dans le Livre precedent, & nous le diviserons en 7 Sections.

SECTION

SECTION I.

Lemmes, & de ce qu'on entend par les Antiparalleles : avec le plan des principales choses qu'on doit traiter dans ce Livre.

I. Lemme.

Quand il y a proportion entre 4 lignes, on y doit remarquer en les comparant deux à deux, deux rapports fort differens. 1.

L'un est celuy qui fait dire que les unes sont proportionelles aux autres.

Et l'autre, que les unes sont reciproques aux autres.

Car si on compare ou la 1.re & la 3.e avec la 2.e & la 4.e, c'est à dire les deux antecedens avec les deux consequens;

Ou les deux premieres avec les deux dernieres, c'est à dire le 1.er antecedent & son consequent avec le 2.e antecedent & son consequent : on dit alors que les unes sont ***proportionelles*** aux autres.

Mais si on compare la 1.re & la 4.e avec la 2.e & la 3.e c'est-à-dire les extremes avec les moyens : on dit alors que les unes sont ***reciproques*** aux autres.

Tout ce que nous avons dit dans le Livre precedent ne regarde que le premier rapport.

Et tout ce que nous dirons dans celuy-cy ne regarde presque que le second, & c'est pourquoy nous l'avons intitulé ***Des Lignes Reciproques.***

II. Lem-

II. LEMME.

II. UNE seule ligne peut être dite reciproque à deux lignes, & deux lignes être reciproques à une seule. Mais c'est lors seulement que cette ligne que l'on compare seule avec deux autres est moyenne proportionelle entre ces deux autres. Car alors elle en vaut deux, parce qu'elle fait deux termes de la Proportion; le premier & le dernier, quand on commence par elle: comme si je dis, une ligne de 6 pieds est à une de 4, comme une de 9 à une de 6; ou le 2.e & le 3.e quand on la met au milieu: comme si je dis, 4. 6. :: 6. 9. Et il faut remarquer que quoique cette derniere disposition soit la plus ordinaire, il y a neanmoins des rencontres où il est utile de se servir de la premiere, comme on pourra voir à la fin de ce Livre.

III. LEMME.

III. LORSQU'UN Angle a deux bases, & que les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base chacun à chacun, cela peut arriver en deux manieres.

La première est quand l'angle que l'une des bases fait sur un côté est égal à l'angle que l'autre base fait sur le même côté. (J'appelle le même côté la même ligne droite tirée du sommet, quoique considerée selon les diverses bases elle tienne lieu de deux côtez.)

Or il est visible que cela ne peut être que quand les bases de cét angle sont paralleles, comme l'on a veu X. 20.

La seconde maniere est quand l'angle qu'une base fait sur un côté est égal à l'angle que l'autre base fait sur l'autre côte. Et alors on peut appeller ces bases *antiparalleles*, pour marquer leur effet opposé à celui

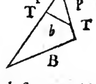
celui des bases paralleles. Ce sont ces sortes de bases qui seront presque toutes les preuves dans tout ce Livre.

IV. LEMME.

LES bases paralleles d'un même angle ne peuvent être disposées que d'une seule maniere, qui est d'être toutes separées l'une de l'autre. Car c'est le propre des paralleles de ne se pouvoir jamais joindre. Mais les antiparalleles peuvent être disposées en trois manieres differentes. IV.

PREMIERE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

LA premiere ressemble à celle des paralleles, les deux antiparalleles étant aussi toutes separées, & alors il est visible que les côtez de cét angle selon la derniere base que nous appellerons B, comprennent les côtez de ce même angle selon la premiere base que nous appellerons *b*: & ainsi de ces lignes ou côtez les uns sont *toutes*, & les autres leurs premieres parties, c'est à dire leur partie la plus proche du sommet, (& remarquez que dans tout ce Livre ce sera toûjours celle-là que nous entendrons par le nom de *partie*, ou de 1.re *partie.*) V.



C'est pourquoy nous appellerons toûjours, comme dans le Livre precedent, les deux toutes T. *T*.
& leurs parties p. *p*.
de sorte que p de caractere Romain sera toûjours la partie de T du même caractere Romain: Et *p* de caractere Italique sera toûjours la partie de *T* de caractere Italique.

Or afin que les bases B & *b* soient antiparalleles, il est clair qu'il faut

Que

Que l'angle que T premiere toute fait sur B, soit égal à l'angle que *p* partie de la seconde toute fait sur *b*. Et que l'angle que *T* seconde toute fait sur B, soit égal à l'angle que p partie de la premiere toute fait sur *b*.

Seconde disposition des Antiparalleles.

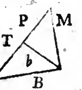
VI. La seconde est quand elles se croisent. Et alors ce ne sont pas les deux toutes qui sont les côtez au regard d'une base, & les deux parties qui le sont au regard de l'autre, comme dans la premiere dispositiou.

Mais les côtez au regard de chaque base sont une toute & la partie de l'autre toute. Et ainsi pour distinguer les deux bases, nous appellerons B celle qui se trouve terminée par l'extremité de T, & l'autre *b*.

Or afin que les bases soient antiparalleles dans cette disposition, il est clair qu'il faut que les angles que les deux toutes font, l'une sur B & l'autre sur *b*, soient égaux ; & que ceux que les deux parties font, l'une sur B & l'autre sur *b*, soient égaux aussi.

Troisiéme disposition des Antiparalleles.

VII. La troisiéme est quand les deux bases se joignent en un méme point de l'un des côtez. Et alors comme ce côté n'est point partagé, & que seul il tient lieu d'une toute & de sa partie, nous l'appellerons M ; appellant à l'ordinaire la dernie-



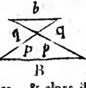
re base B, la premiere *b*, le côté partagé T, & sa partie p.

Or afin que les bases B & *b* soient antiparalleles, il faut que l'angle que T fait sur B soit égal à l'angle que M fait sur *b*; & que l'angle que M fait sur B, (qui comprend celui qu'elle fait sur *b*,) soit égal à l'angle que p fait sur *b*.

V. LEMME.

LORSQUE deux lignes se coupant font 4 angles qui sont deux à deux opposez au sommet, & par consequent égaux: on peut donner des bases à deux de ces angles opposez au sommet, qui soient telles que ces angles soient semblables, c'est à dire, que les deux angles sur la base de l'un soient égaux aux deux angles sur la base de l'autre chacun à chacun. VIII.
Mais cela peut arriver en deux manieres; que pour mieux faire entendre, p & q de caractere Romain marqueront les deux parties d'une même ligne, & *p* & *q* de caractere Italique les deux parties de l'autre ligne. Et de plus, comme chaque angle doit avoir pour ses côtez la partie d'une ligne & la partie d'une autre ligne: p & *p* seront les côtez d'un angle, & q & *q* les côtez de l'autre.

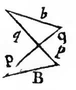
Soit enfin appellée B la base de l'angle qui a p & *p* pour ses côtez; & *b*, celle de l'angle qui a q & *q* pour ses côtez. Cela étant, voici les deux manieres dont ces angles opposez au sommet peuvent être semblables:



La 1.re est quand ce sont les angles alternes qui sont égaux sur les deux bases. C'est à dire quand ce sont les deux parties d'une même ligne, comme p & q, qui font des angles égaux p sur B, & q sur *b*, & ainsi des deux autres; & alors il est clair que ces deux bases doivent être paralleles.

La

IX. La 2.e est quand ce sont les angles de proche en proche qui sont égaux sur les deux bases; de sorte que ce sont p & q, parties l'une d'une ligne & l'autre de l'autre, qui font les angles égaux p sur B, & q sur b; & p & q qui font aussi les angles égaux p sur B, & q sur b.



Ce sont encore ces bases que nous appellerons *antiparalleles*, pour marquer leur effet contraire à celui des paralleles.

VI. Lemme.

X. Comme lorsqu'un angle a deux bases paralleles, on peut & on doit considerer ses côtes selon une base dans un espace parallele, & ses autres côtez selon l'autre base dans un autre espace parallele: il en est de même quand les bases sont antiparalleles; avec cette difference,

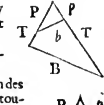
Que quand les bases sont paralleles, une seule ligne tirée par le sommet fait trois espaces paralleles: le 1.er compris entre le sommet & la derniere base; le 2.e entre le sommet & la 1.re base; le 3.e entre les deux bases.

Mais quand elles sont antiparalleles, ce 3.e espace ne peut pas être parallele. Et pour les deux autres, on ne les peut concevoir qu'en s'imaginant deux lignes differentes tirées par le sommet, l'une parallele à B, & l'autre parallele à *b*. Car B & *b* n'étant pas paralleles entr'elles; il est visible qu'une seule ligne ne peut pas être parallele à l'une & à l'autre; mais il suffit de s'imaginer ces lignes tirées par le sommet, sans qu'il soit necessaire de les décrire.

Et ainsi nous devons toûjours nous imaginer dans ces angles qui ont deux bases antiparalleles deux espases paralleles. L'un que j'appelleray A, com-

compris entre le sommet & B. Et l'autre que j'appelleray E, compris entre le sommet & *b*.

Et de plus il faut remarquer,



xi.

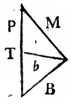
Que dans la 1.re disposition des bases antiparalleles les deux toutes T & *T* sont dans l'espace A, & les deux parties p & *p* dans l'space E.



xii.

Que dans la seconde, qui est quand les bases se croisent, T & *p* sont dans l'espace A; & *T* & p dans l'espace E.

Que dans la troisiéme, qui est quand elles se joignent en un seul point d'un côté, M se trouve dans l'un & l'autre espace. Car l'espace A comprend T & M; & l'espace E comprend M & p.



xiii.

VII. Lemme.

Il en est de même quand les angles opposez au sommet ont leurs bases antiparalleles. xiv.

Car il se faut imaginer deux lignes tirées par le sommet commun, dont l'une soit parallele à B & l'autre à *b*; & ainsi l'on aura deux espaces paralleles, l'un compris entre le sommet & B, (dans lequel sont p & *p*,) que nous appellerons A. Et l'autre compris entre ce même sommet & *b*, (dans lequel sont q & *q*,) que nous appellerons E. (9. *sup.*)

VIII. Lemme.

Tout ce qu'on aura à prouver dans ce Livre le sera par le premier Theoréme du Livre precedent, xv.

dent, que je repeteray encore ici, afin qu'on l'ait plus present dans l'Esprit.

Si deux lignes (comme C & D) sont dans un même espace parallele, comme est l'espace A:

Et que deux autres lignes comme (c & d) soient dans un autre espace parallele, comme est l'espace E:

Si C & c sont également inclinées, C dans A, & c dans E; & que D & d soient aussi également inclinées D dans A & d dans E: les deux également inclinées entr'elles sont proportionelles aux deux qui le sont aussi entr'elles.

C.c. :. D.d. & *alternando*, C.D. :: c.d.

IX. Lemme.

XVI. Pour ne se point broüiller en disposant les termes, il est bon de s'astraindre à donner toûjours pour premier & deuxiéme termes de la Proportion les également inclinées dans les deux differens espaces paralleles, & de même au regard du troisiéme & du quatriéme. Et pour premier & troisiéme termes, celles qui sont dans le même espace parallele. Et de même au regard du deuxiéme & du quatriéme. Sauf à les disposer apres autrement, *Alternando*.

I. PROPOSITION FONDAMENTALE DES RECIPROQUES.

XVII. Lorsqu'un même angle à deux bases antiparalleles, une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. C'est à dire que

T.p. :: T.p. ou T.T. :: p.p.

PRE-

PREMIERE PREUVE
DANS LA PREMIERE DISPOSITION DES ANTI-PARALLELES.

Dans cette diſpoſition les deux toutes T & *T* XVIII.
ſont dans l'eſpace A, & les deux parties p & *p* ſont dans l'eſpace E. (par 11. S.)

Or (par 5. *ſup.*) T & *p* ſont également inclinées, T dans A, & *p* dans E. De même auſſi *T* & p ſont également inclinées, *T* dans A, & p dans E.

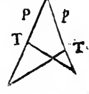
Donc (par 15. *ſup.*) T. *p.* :: *T*. p.

Or T & ſa partie p ſont les extremes de la Proportion, dont *T* & *p* ſa partie ſont les moyens.

Donc une toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie.

SECONDE PREUVE
DANS LA SECONDE DISPOSITION DES ANTI-PARALLÉLES.

Dans cette 2.e diſpoſition T & *p* (partie de l'autre toute) ſont dans l'eſpace A; & *T* & p dans l'eſpace E. (par 12. *ſup.*) XIX.



Or (par 6. *ſup.*) T & *T* ſon également inclinées, T dans A, & *T* dans E. Et de même p & *p* également inclinées, *p* dans A & p dans E.

Donc (par 15. *ſup.*) T. *T.* :: *p*. p.



Je reserve la 3.e disposition pour un Corollaire à part.

Corollaire.

xx. Quand un angle a deux bases antiparalleles dans la 3.e disposition, qui est quand elles se joignent en un seul point d'un côté : ce côté est moyen proportionel entre l'autre côté entier & sa partie ; c'est à dire que

T. M. :: M. p.

Car (par 13. *sup.*) dans cette disposition M est dans l'un & l'autre espace ; parce que T & M sont dans l'espace A, & M & p dans l'espace E.

Or (par 7. *sup.*) T & M sont également inclinées, T dans l'espace A, & M dans l'espace E.

Et M & p sont également inclinées, M dans l'espace A, & p dans l'espace E.

Donc (par 15. *sup.*) T. M. :: M. p.

II. PROPOSITION FONDAMENTALE

Des Reciproques.

xxI. Quand deux lignes se coupant font deux angles opposez au sommet qui ont des bases antiparalleles, les parties de l'une de ces lignes qui se coupent en ce sommet sont reciproques aux parties de l'autre. (*Voyez la figure du N. 9.*)

Car (par 14. *sup.*) p & *p* sont dans l'espace A, & q & *q* sont dans l'espace E.

Or (par 9. *sup.*) p & *q* sont également inclinées, p dans A, & *q* dans E.

Et *p* & q également inclinées, *p* dans A & q dans E.

Donc

Donc (par 15. *sup.*)

p.*q*. :: *p*.q.

Or p& q sont les parties de la même ligne: & *p* & *q* sont les parties de l'autre ligne.

Donc les parties d'une ligne sont reciproques aux parties de l'autre.

COROLLAIRE.

XXII. Si une de ces lignes qui en se coupant font des angles opposez au sommet, qui ont des bases antiparalleles, est divisée par la moitié: une seule de ces moitiez est moyenne proportionelle entre les parties de l'autre ligne.

Cela est clair, puisque c'est la même chose de donner pour les moyens de cette Proportion les deux moitiez de la même ligne, ou une seule moitié prise deux fois.

PLAN GENERAL
DE CE QUE L'ON PRETEND MONTRER DANS LA SUITE DE CE LIVRE.

XXIII. *Nous avons déja dit que les extremes d'une Proportion comparez aux moyens s'appellent* reciproques*: & qu'ainsi il y en a dans toute Proportion.*

Mais ce que l'on pretend principalement faire dans ce Livre, est de montrer comment deux lignes droites qui se rapportent à une même, (ou parce qu'elles en sont les deux parties, ou parce que l'une est la toute, & l'autre une partie de cette toute,) sont reciproques à deux autres lignes, qui se rapportent de la même sorte à une même ligne, ou quelquefois même à une seule qui étant repetée deux fois sera ou les deux extremes ou les deux moyens de la Proportion.

Il faut pour cela que les deux lignes à chacune desquelles deux se rapportent, & que par cette raison ont peut appeller les principales, *ayent un point commun; ce qui peut être en deux manieres: Ou parce qu'elles se croisent & se coupent effectivement en un point, & y font des angles opposez au sommet; & alors ce point s'appellera pour cette raison* point de section: (Voyez la fig. du N. 9. sup.) *Ou parce qu'elles se terminent à un même point & y font un angle seulement sans passer plus outre; & alors ce point commun s'apppellera* terminant. (Voyez les trois dernieres figures. Sup.)

Quand le point commun est de section, *chaque ligne étant coupée en deux, ce sont les deux parties d'une même ligne qui doivent être reciproques aux deux parties de l'autre. Et alors ce point commun aux deux* principales *l'est aussi aux 4 lignes: quoy que ce ne soit qu'au regard des principales qu'il soit point de* section: *car les parties ne s'y coupent pas, mais y aboutissent.*

Mais quand le point est terminant *au regard des principales: parce que cela seul ne donneroit que deux lignes, & qu'il en faut 4, ou au moins 3, il est necessaire que ces lignes principales qui sont terminées par ce point commun, soient encore toutes deux coupées en quelque autre endroit, (ou au moins l'une,) afin que cela puisse faire 4 lignes, ou au moins 3. Et alors ce sont les deux toutes, & la partie de chacune vers le point commun, qui sont les 4 lignes: & il faut que ce soit chaque toute & sa partie vers le point commun qui soient reciproques à l'autre toute & à sa premiere partie.*

Quand le point est de section, *les deux principales se coupant font 4 angles dans ce point de section; mais il suffit d'en considerer deux opposez au sommet. Et il faut alors que ces deux Angles qui sont égaux ayent leurs bases antiparalleles, selon ce qui vient d'être dit N. 9.*

Mais

Mais quand le point est terminant, *c'est le même angle qui doit avoir deux bases antiparalleles, & l'une des trois manieres qui ont été representées S.* 18. 19. 20.

Il n'est donc question que de chercher les voyes generales pour trouver ces bases antiparalleles.

Or voici ce qui m'est venu en pensée sur cela :

J'ai reconnu qu'il n'y a point de voye generale pour couper tout d'un coup les côtez d'un angle, ou les côtez de deux angles opposez au sommet, par des bases antiparalleles, qu'en y employant la circonference d'un Cercle ; c'est pourquoi on ne peut trouver sans cela la moyenne proportionelle entre deux lignes données.

J'ai inferé de là qu'il falloit que le point commun dont nous venons de parler, soit qu'il soit de section, *ou* terminant, *ait rapport à la circonference d'un Cercle. C'est à dire qu'il faut qu'il soit*

Ou { 1. *Dans le Cercle.*
2. *Hors le Cercle.*
3. *Dans la circonference du Cercle.* }

Quand le point commun est au dedans du Cercle, c'est toûjours un point de section, & ce sont deux angles opposez au sommet qui ont leurs bases antiparalleles. (Voyez la fig. du N. 27. ci aprés.) *Car il faut que les 4 lignes dont deux sont reciproques aux deux autres, soient les deux parties de chacune des principales qui se coupent en un point quelconque au dedans du Cercle, & qui se terminent de part & d'autre à 4 points differens de la circonference.*

Quand le point commun est hors le Cercle, c'est toûjours un point terminant. (Voyez les fig. des N. 31, 32, & 33. ci aprés.) *Car ce sont deux toutes qui partant de ce point qui est hors le Cercle coupent chacune la circonference du Cercle en un point de sa convexité, & se terminent à un autre*

 point

point de sa concavité ; & alors ce sont chaque toute & sa partie hors le Cercle qui sont reciproques à l'autre toute & à sa partie qui est aussi hors le Cercle. Mais il peut arriver que l'une de ces lignes ne faisant que toucher le Cercle sans passer plus outre, le point auquel elle aboutira tenant lieu de convexité & de concavité, elle sera toute seule reciproque à l'autre toute & à sa partie, c'est à dire qu'elle sera moyenne proportionelle entre cette toute & sa partie.

Mais quand le point commun est dans la circonference même du Cercle, on a besoin, pour avoir des reciproques, d une ligne droite indefinie, outre la circulaire, qui coupe perpendiculairement celle qui peut être menée indefiniment du point commun en passant par le centre. Et alors cette ligne indefinie *ou coupe le Cercle*, (comme dans les fig. des N. 40, 41, 42, 43, & 44. ci apres,) *ou le touche*, (comme dans les fig. des N. 46, & 47, ci apres,) *ou est au dessous, ou est au dessus. J'appelle* au dessous, *celle qui est telle, que le Cercle est entre cette ligne & le point commun*, (comme dans la fig. du N. 48, ci apres;) *j'appelle* au dessus, *celle qui est à l'opposite*, (comme dans la fig. du N. 49. ci apres.)

Dans les trois premiers cas, le point commun est toujours un point terminant, *& chacune des deux lignes qui en partent, ou coupe le Cercle & est terminée par l'indefinie*, (comme dans les fig. des N. 41, 46 & 48, ci apres;) *ou coupe l'indefinie & est terminée par le Cercle*, (comme dans la fig. du N. 40. ci apres;) *ou l'une coupe le Cercle & est terminée par l'indefinie, & l'autre coupe l'indefinie & est terminée par le Cercle*, (comme dans la fig. du N. 42, ci apres.) *Et alors chaque toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. Mais il y en peut avoir une qui se terminera à un point commun à la circonference & à l'indefinie*,

(comme

(comme dans les fig. des N. 43 & 44, ci apres ;) *& alors elle sera moyenne proportionelle entre l'autre toute & sa partie.*

Mais dans le 4.e cas, c'est à dire quand l'indefinie est au dessus du point commun, (Voyez la fig. du N. 49, ci apres :) *ce point commun ne peut être qu'un point de* section. *Car toutes les fois que des lignes se couperont dans ce point & se termineront d'une part à la circonference, & de l'autre à l'in*definie, *les parties de l'une sont reciproques à celles de l'autre.*

Il faut relire tout le Livre IX. Car c'est sur ce qui y est dit que sont fondées les demonstrations de celui-ci.

DEUX AVIS DE LOGIQUE.

I.

Quand on a à prouver qu'un angle ayant deux bases, les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun, on est assuré que cela est, quand on a prouvé que l'un des angles sur une base est égal à l'un des angles sur l'autre, parce qu'il s'ensuit de là necessairement que l'autre est égal aussi à l'autre. XXIV.

Cette preuve est convainquante, & on s'en doit passer quand on ne peut mieux. Mais il faut avoüer qu'elle n'est pas si bonne & ne fait pas si bien entrer dans la nature des choses, que celle qui montre positivement que l'un & l'autre angle d'une base est égal à l'un & l'autre angle de l'autre. Et c'est pourquoi je ne me contenteray point de la premiere sorte de preuve, & je me serviray toûjours de cette derniere.

2.

XXV. *Quand on a à prouver de plusieurs binaires de lignes, qu'ils sont reciproques les uns aux autres, on en est asseuré quand on peut montrer qu'ils sont tous reciproques à un même binaire, ou qu'ils ont tous la même moyenne proportionelle.*

Mais quoique cela soit convainquant, l'Esprit ne reçoit pas la même clarté & ne demeure pas si satisfait, que si on montroit immediatement de chaque binaire qu'il est reciproque à chaque autre.

Et ainsi, quoi qu'il me fût facile d'employer la premiere voye, je me suis resolu de n'employer que cette derniere, comme plus parfaite & plus lumineuse, pour parler ainsi; & peut être qu'on trouvera que ces deux exemples sont remarquables, pour faire voir la difference qu'il y a entre convaincre l'Esprit en le mettant hors d'état de pouvoir douter qu'une chose soit: & le satisfaire pleinement en lui donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement desirer.

Reprenons maintenant la division proposée; qui est que le point commun aux lignes reciproques par la section du Cercle, est necessairement

1. *Ou dans le Cercle.*
2. *Ou hors le Cercle.*
3. *Ou dans la circonference du Cercle.*

SE

SECTION II.

Premiere voye generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun est au dedans du Cercle.

Cette voie est pour trouver que les parties d'une ligne sont reciproques aux parties d'une autre ligne, ou à une ligne quand elle est moyenne proportionelle. Et ainsi elle est toute appuyée sur la 2.e Proposition fondamentale & son Corollaire (21. & 22. *sup.*) qui est des angles opposez au sommet qui ont leurs bases antiparalleles. XXVI.

I. Theoréme.

Si deux cordes se coupent dans le Cercle, les parties de l'une sont reciproques aux parties de l'autre. XXVII.

Soient les cordes *c f* & *d g* qui se coupent en *k*. Soient tirées les bases à deux angles opposez *c g*, *df*. Je dis qu'elles sont antiparalleles.

Car (par IX. 20.) les angles vers *g* & vers *f* sont égaux, parce qu'ils sont appuyez sur le méme arc *c d*. Et par la même raison les angles vers *c* & vers *d* sont égaux aussi, étant appuyez sur le même arc *gf*.

Donc les bases *c g* & *d f* sont antiparalleles. (9. *sup.*)

Donc par la 2.e Proposition fondamentale (21. *sup.*)

kf. kg :: *k d. k c.*

p. q. :: p. q.

II. Theoréme,

Corollaire du Premier.

XXVIII. Si une des lignes est coupée par la moitié, une de ces moitiez est moyenne proportionelle entre les deux parties de l'autre.

C'est le Corollaire même de la 2.e Proposition fondamentale.

Corollaire.

XXIX. Si d'un point quelconque d'un diametre on éléve une perdendiculaire jusques à la circonference, cette perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre.

Car il est clair que cette perpendiculaire est la moitié de la corde qui couperoit le diametre perpendiculairement par ce point. Donc, par le Theoréme precedent, elle doit être moyenne proportionnelle entre les parties du diametre.

SECTION III.

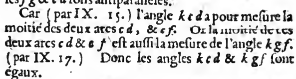
Seconde voie generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun est hors le Cercle.

XXX. Quand le point commun est hors le Cercle, les côtez de l'angle qui a ce point pour sommet peuvent être coupez chacun deux fois par la circonference du Cercle; une fois par la convexité en entrant dans le Cercle, & une fois par la concavité, où on les suppose terminées; si ce n'est que que le point de l'attouchement tenant lieu tout seul de la convexité & de la concavité, un des côtez peut n'être terminé qu'à ce point. Et alors il sera tangente du Cercle,

cle, & les deux bafes antiparalleles n'auront que trois points differens. C'eft ce qu'on verra dans les deux Theorémes fuivans.

III. Theoréme.

Lorsque d'un point hors le Cercle on tire des lignes qui coupent le Cercle en fa convexité, & font terminées en fa concavité: chaque toute & fa partie hors le Cercle, font reciproques à chaque autre toute & à fa partie hors le Cercle. XXXI.



Soient tirées kf, qui coupe la circonference en c; & kg qui la coupe en d. Je dis que les bafes fg & cd font antiparalleles.

Car (par IX. 15.) l'angle kcd a pour mefure la moitié des deux arcs cd, & cf. Or la moitié de ces deux arcs cd & cf eft auffi la mefure de l'angle kgf. (par IX. 17.) Donc les angles kcd & kgf font égaux.

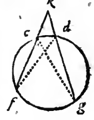
On prouvera de la même forte l'égalité des angles kdc & kfg.

Donc les bafes fg & cd font antiparalleles. (3. *fup.*).

Donc $kf.\ kd.\ ::\ kg.\ kc.$

T. p. :: T. p.

On peut auffi prouver ce Theoréme en croifant les bafes, en montrant que les bafes fd & gc font antiparalleles. XXXII.



Car les angles vers f & vers g font égaux, étant appuyez fur le même arc cd.

Et pour les angles kcg & kdf, ils font égaux; parce que fi on les examine, on trouvera qu'ils ont chacun pour mefu-

re la moitié des trois arcs *f c*, *c d*, *d g*. (IX. 15.)

Donc les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles.

Donc *kf*. *kg* :: *kd*. *kc*.
T. T. :: *p*. p.

IV. Théoréme,

Corollaire du troisiéme.

XXXIII. Si l'une de ces lignes tirées d'un point hors le Cercle est une tangente, cette tangente est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie hors le Cercle.

Soit tirée *k f* qui coupe le Cercle en *c*, & la tangente *k E*; je dis que les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles. Car (par IX. 17.) l'angle *k f E*, a pour mesure la moitié de l'arc *c E*, qui est aussi la mesure de l'angle *k E c* (par IX. 12.)

Et l'angle *k E f*, (par IX. 12.) a pour mesure la moitié des deux arcs *E c* & *c f*, qui est aussi la mesure de l'angle *k c E*, par IX. 15.

Donc les bases *f E* & *E c* sont antiparalleles.

Donc, par 20. *sup*.
k f. *k E*. :: *k E*. *k c*.
T. M. :: M. p.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Il n'y a rien jusqu'ici qui ne soit dans toutes les Geometries : si ce n'est qu'il est prouvé d'une maniere nouvelle. XXXIV.

Mais on le pourroit encore faire comprendre d'une maniere plus naturelle & plus simple sans considerer aucuns angles, faisant seulement attention à la nature du Cercle : ce qui fera voir aussi pourquoi on a besoin d'un Cercle pour couper des lignes Reciproquement.

Soit que le point commun soit au dedans du Cercle, ou au dehors, on peut considerer entre toutes les lignes qui se coupent dans ce point ou qui partent de ce point, telle qui passe par le centre que nous appellerons la centrique, *& les autres* excentriques.

Quand le point est au dedans du Cercle, la centrique *est un diametre, & par consequent la plus grande ligne qui puisse passer par le point commun que nous supposons n'être pas le centre, mais c'est aussi la plus inégalement partagée. Car comme il paroît par VII. 25. la plus petite partie d'une* excentrique *quelconque, est plus grande que la plus petite partie de la* centrique ; *& en récompense la plus grande partie de l'*excentrique *est plus petite que la grande partie de la* centrique. *Et l'uniformité de la ligne circulaire fait que cette compensation est si juste, qu'il ne faut pas s'étonner si les deux parties de la centrique sont reciproques aux deux parties de toute excentrique, c'est à dire si la petite partie de la centrique est à la plus petite partie de l'excentrique, comme la plus grande de l'excentrique est à la plus grande de la centrique. D'où il s'ensuit aussi que les deux parties d'une excentrique quelconque doivent être reciproques aux deux parties de toute autre excentrique.*

Il en est de même quand le point est hors le Cercle. Car la centrique est aussi la plus longue de toutes, (VII. 25.) & sa partie qui est hors le Cercle est au contraire plus courte, que la partie de toute autre qui est aussi hors le Cercle. Ce qui faisant une compensation juste à cause de l'uniformité du Cercle, on juge aisément que la centrique & sa partie hors le Cercle doivent être reciproques à toute excentrique & sa partie hors le Cercle; & qu'il en est de même des excentriques comparées les unes aux autres; celles qui approchent le plus de la centrique étant toûjours les plus longues, & ayant toûjours aussi leurs parties de dehors plus courtes.

SECTION IV.

Troisiéme voie generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun est dans la circonference du Cercle.

XXXV. *Je ne croi pas que ce que l'on va dire se trouve nulle part.*

Nous avons déja remarqué (23. sup.) *que cette derniere voie generale se pouvoit diviser en deux manieres: Dans l'une desquelles le point commun étoit* terminant, *& dans l'autre* de section.

Qu'il étoit terminant, *quand la ligne droite indefinie, dont nous allons parler, ou coupoit le Cercle, ou le touchoit, ou étoit au dessous du Cercle.*

Et qu'il étoit de section, *c'est à dire que les deux lignes principales s'y coupoient, quand cette ligne indefinie étoit au dessus du Cercle. Il faut donc traiter separément ces deux manieres.*

PRE-

PREMIERE MANIERE DE LA III. VOIE GENERALE :

Quand l'indefinie coupe, ou touche, ou est au dessous du Cercle.

Une seule Proposition comprendra la maniere de trouver une infinité de Reciproques. Et il est peut-être difficile de s'imaginer rien de plus general sur la proportion des lignes par la Geometrie ordinaire.

PROPOSITION GENERALE.

SI d'un point dans la circonference on tire une ligne indefiniment par le centre, & qu'on en tire une autre indefinie que j'appelleray y, qui coupe perpendiculairement celle qui passe par le centre : en quelque endroit qu'elle la coupe, soit en coupant aussi le Cercle, soit en le touchant, soit tout à fait hors le Cercle & au dessous : toutes les lignes tirées du point dans la circonference qui seront ou coupées par y, & terminées par la circonference : ou coupées par la circonference & terminées par y : seront telles, que chaque toute & sa partie vers le point commun seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie ; & chaque toute & sa partie auront pour moyenne proportionnelle celle qui sera terminée à un point commun à y & à la circonference. XXXVI.

CETTE proposition est si vaste & comprend tant de cas qu'on n'en sçauroit bien voir la verité, qu'en la considerant dans ces cas particuliers qui sont trois principaux. XXXVII.

Le 1.er Quand la ligne y coupe le Cercle.

Le 2.e Quand elle le touche.

Le

Le 3.e Quand elle est tout à fait hors le Cercle, & au dessous.

C'est ce que nous traiterons par divers Theorémes.

PREMIER CAS.

XXXVIII. Le 1.er Cas est quand *y* coupe le Cercle. Et alors il n'est point necessaire de dire que cette ligne doit être perpendiculaire à celle qui étant tirée du point K passe par le centre : car il suffit de dire, (ce qui est la même chose,) qu'elle doit couper le Cercle en deux points, que j'appelleray E & *E*, qui soient également distans de K. Cela étant vrai; voici le 1.er Theoréme :

V. THEORÉME.

XXXIX. Si la ligne *y* coupe le Cercle en deux points également distans de K, toutes les tirées du point K qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference : ou coupées par la circonference, & terminées par *y* : seront telles que chaque toute & sa partie vers K seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie vers K.

On peut faire sur cela trois comparaisons :

La 1.re De deux lignes qui sont toutes deux coupées par *y* & terminées pat la circonference.

La 2.e De deux lignes qui sont toutes deux coupées par la circonference, & terminées par *y*.

La 3.e De deux lignes, dont l'une est coupée par *y*, & terminée par la circonference; & l'autre coupée par la circonference, & terminée par *y*.

PREMIERE COMPARAISON.

XL. Soient tirées K *f*, qui coupe *y* en *c*; & K *g* qui la coupe en *d*: je dis que les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles. Donc tout le reste s'ensuit, par la 1.re Proposition fondamentale, *sup*. 17.

Car

Car (par IX. 41.) l'angle K *c E*, a pour mesure la moitié de l'arc K *E* plus la moitié de l'arc E*f*; & l'arc K *E* étant égal à l'arc K E, cette mesure est égale à la moitié des deux arcs K E & E*f*. Or la moitié des deux arcs K E & E*f* est la mesure de l'angle inscrit K *g f*, parce que l'arc K E *f*, sur lequel il est appuyé, comprend ces deux-là.

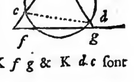
Donc l'angle K *c E* (ou K *c d*) est égal à l'angle K *g f*. On prouvera la même chose des angles K *d c* & K *f g*. Donc ces deux bases sont antiparalleles.

Donc (par la 1.re Proposition fond. *sup.* 17.) la toute d'une part & sa partie, sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. Ce qu'il falloit demontrer.

K *f*. K *d*. :: K *g*. K *c*.
T. *p*. :: *T*. p.

Seconde Comparaison.

Soient tirées K *f* qui coupe la circonference en *c*, & K *g* qui la coupe en *d*; je dis que les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles. XII.



Car (par IX. 45.) l'angle K *f g* a pour mesure la moitié de l'arc K *c*, qui est aussi la mesure de l'angle inscrit K *d c*. Donc les angles K *f g* & K *d c* sont égaux.

On prouvera de la même sorte que les angles K *g f* & K *c d* sont égaux.

Donc

Donc les bases *fg* & *c d* sont antiparalleles.
Donc K*f*. K*d*. :: K*g*. K*c*.
T.*p*. :: *T*.p.

Troisiéme Comparaison.

XLII. Soient tirées K*f* qui coupe la circonference en *c*, & K*g* qui coupe *y* en *d*.

Dans cette comparaison les bases se croisent. Car il faut prendre pour les deux bases *fd* & *g c*.

Or pour prouver qu'elles sont antiparalleles, il faut montrer que les angles K*fd*, ou K*fE*, & K*gc*, sont égaux. Ce qui est facile, puisqu'il est clair (par ce qui vient d'être dit 41. *sup.*) que l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc K*c*; & pour les deux autres K*d* E & K*cg*, cela se prouve aussi facilement (par ce qui a été dit 40 *sup.*) de l'égalité entre les angles K*d f* (ou K*d* E,) & K*cg*.

Donc les bases *fd* & *g c* sont antiparalleles.
Donc K*f*. K*d*. :: K*g* K*c*.
T. *p*. :: *T*. p.

VI. Theoréme,

Corollaire du Cinquiéme.

XLIII. La ligne tirée de K au point commun à la circonference & à *y* (c'est à dire K E ou K *E*,) est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie, soit qu'elle soit coupée par *y* & terminée par la circonference, soit qu'elle soit coupée par la circonference & terminée par *y*.

PRE-

Premiere Comparaison.

Soit tirée K *f* qui coupe *y* en *c*, & K E; il ne faut que prouver que les bases *fE* & *cE* sont antiparalleles. Ce qui est facile.

Car les angles inscrits K *f E* & K *E c* (ou K *E* E,) sont égaux; parce que (par IX. 17.) l'un est appuyé sur l'arc K *E*, & l'autre sur l'arc K E, qui sont égaux.

Et pour les angles K *c E*, & K *E f*, leur égalité se prouve de la même sorte que l'égalité des angles K *f g* & K *d c*, dans le 5.e Theoréme, 1.re Comparaison.

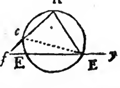
Donc ces bases sont antiparalleles & disposées en la 3.e maniere expliquée dans le 4.e Lemme.

Donc K*f*. K*E*. :: K*E* K*c*.

T. M. :: M. p.

Seconde Comparaison.

Soit tirée K*f* qui coupe la circonference en *c*; je dis que les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles. Car les angles K *f E* & K *E c* ont pour mesure la moitié de l'arc K *c*, selon ce qui a été dit, 5.e Theoréme, 2.de Comparaison; & les angles inscrits K *E f* (ou K *E* E,) & K *c E*, sont égaux aussi, étant appuyez sur les arcs égaux K E & K *E*. XLIV.



Donc K*f*. K*E*. :: K*E*. K*c*.

T. M. :: M. p.

SE-

SECOND CAS.

XLV. Le 2.e Cas de la Propoſition generale (*ſup.* 37.) eſt quand la ligne *y* touche le Cercle en un point diametralement oppoſé à K : ce qui comprend auſſi deux Theorémes.

VII. THEORÉME.

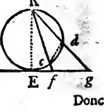
XLVI. QUAND *y* touche le Cercle en un point diametralement oppoſé à K : toutes les lignes tirées de K ſur cette ligne, (qui ne peuvent pas n'être point coupées par le Cercle,) ſont telles, que chaque toute & ſa partie ſont reciproques à chaque autre toute & à ſa partie.

Si les deux lignes étoient tirées de deux differens côtez, il n'y auroit rien qui n'euſt déja été prouvé 41. *ſup.* C'eſt pourquoy nous les propoſerons du même côté. Ce qui pourra auſſi ſervir au cas ſemblable du 5.e Theoréme.

Soient tirées du même côté K *f*, coupée par la circonference en *c*, & K *g* coupée par la circonference en *d*; il faut prouver que les baſes *fg* & *c d* ſont antiparalleles. Or il y a ſur chacune un angle aigu K *g f* (ou K *g* E,) & K *c d*; & un obtus K *f g* & K *d c*.

Pour les aigus, ils ſont égaux; parce qu'ils ont chacun pour meſure la moitié de l'arc K *d*. (par IX. 17 & 45.)

Et pour les obtus, il eſt aiſé de prouver qu'il ſont égaux, par leurs complemens *c d g* & K *f* E.



Car par IX. 15. *c d g*, a pour meſure la moitié des deux arcs K *d* & *d c*.

Et par IX. 45. K *f* E, a pour meſure la moitié de l'arc K *d c*, qui comprend ces deux-là.

Donc

Donc ces angles aigus sont égaux.

Donc les obtus K *d c* & K *f g*, dont ces aigus sont les complemens, sont égaux aussi.

Donc les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles.

Donc K *f*. K *d* :: K *g*. K *c*.

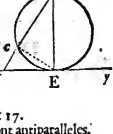
T. *p* :: T. p.

VIII. THEORÉME,

COROLLAIRE DU SIXIÉME.

LE diametre tiré du point K (& par consequent tout autre) est moyen proportionel entre chaque toute & sa partie. XLVII.

Soit tirée K *f* qui soit coupée en *c*; les bases *f* E & *c* E sont antiparalleles.



Car les angles K E *f*, & K *c* E, son droits, & par consequent égaux.

Et les aigus K *f* E; & K E *c*, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc K *c* (par IX. 45, & 17.

Donc les bases *f* E & *c* E sont antiparalleles.

Donc K *f*. K E. :: K E. K *c*.

T. M. :: M. p.

TROISIÉME CAS.

LE 3.e Cas est quand la ligne *y* est tout à fait hors le Cercle & au dessous : mais comme il n'a aucune difficulté particuliere, nous ne nous y arrêterons point. XLVIII.

Il faut seulement remarquer, qu'il n'y a point de

de moyenne proportionelle dans ce 3.e Cas; parce qu'il n'y a aucun point qui soit commun à la ligne *y*, & à la circonference: la ligne *y* étant tout à fait hors le Cercle.

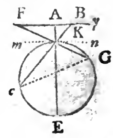
SECONDE MANIERE

De la troisiéme voie pour trouver des Reciproques: Quand l'indefinie est tout à fait hors le Cercle & au dessus.

Nous avons veu dans le Plan, (23. S.) que l'indefinie est au dessus du point commun, quand le Cercle n'est pas entre ce point & l'indefinie. Et alors le point commun sera de section, & tout se reduira à ce Theoréme:

IX. THEORÉME.

XLIX. QUAND la ligne *indefinie* qui coupe perpendiculairement le diametre prolongé, est au dessus du Cercle, c'est à dire quand le Cercle n'est point entre cette ligne *indefinie* & le point commun: toutes les lignes qui se couperont dans ce point, étant terminées d'une part par l'*indefinie*, & de l'autre par le Cercle, les parties de l'une feront reciproques aux parties de l'autre.



SOIT *l'indefinie y*; le diametre prolongé A E; le point commun K; l'une des secantes B *c*, & l'autre F G; & une tangente au point K, qu'on appelle *m n*. Si on tire la ligne *c* G, je dis que les angles A B *c* & *c* G K, sont égaux. Car l'indefinie

&

& la tangente étant paralleles, les angles correſpondans que chaque ſecante fait ſur l'une & l'autre ſont égaux : c'eſt à dire que l'angle A B *c* eſt égal à l'angle *m* K *c*. (VIII. 59.) Or *m* K *c*, a pour ſa meſure la moitié de l'arc K *c* (par IX. 12.) qui eſt auſſi la meſure de l'angle *c* G K (par IX. 17.) Donc les angles A B *c* & *c* G K, ſont égaux. Et il en eſt de même des deux angles A F G, & G *c* K. Donc les baſes B F & G *c* des deux angles oppoſez en K ſont antiparalleles, par 9. *ſup.*

Donc les parties de la ligne B *c* ſont reciproques à celles de la ligne F G, par 21. *ſup.*

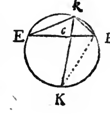
SECTION V.

Autres Theorémes, ou qui n'entrent pas dans l'analogie des precedens, ou qui ſe peuvent rapporter à pluſieurs de ces trois voies.

X. Theoréme.

Les deux côtez de tout angle inſcrit au Cercle ſont reciproques à la ligne entiere, qui le partageant par la moitié ſe termine à la circonference, & à la partie de cette ligne compriſe entre le ſommet de l'angle coupé par la moitié & ſa baſe.

Soit l'angle inſcrit E *k* E. Soit pris le point K dans le ſegment oppoſé également diſtant d'E & d'E. La ligne *k* K qui coupe la baſe en *c* partage cét angle inſcrit par la moitié, puiſque les deux angles E *k* K & E *k* K, étant appuyez ſur des arcs égaux, ſont égaux, (par IX. 20.)



Or

Or les angles E *k c*, (qui est le même qu'E *k* K,) & *E k* K, ne sont pas seulement égaux, mais ils sont aussi semblables; c'est à dire que les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun, à chacun.

Car les angles inscrits vers E & vers K sont égaux (par IX. 20.) parce qu'ils sont appuyez sur le même arc *k E*.

De plus l'angle *k c* E a pour mesure la moitié de l'arc *k* E sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé *E* K. (IX. 41.) Et l'arc E K étant égal à l'arc *E* K, cette mesure est égale à la moitié des arcs *k* E & E K, qui est la mesure de l'angle inscrit *k E* K. (par IX. 17.

Donc les angles *k c* E & *k E* K sont égaux.

Donc les angles E *k c* & *E k* K sont semblables. (X. 7.)

Donc (par X. 18.)

*k*E. *k*K. :: *k c*. *k E*.

Ce qu'il falloit demontrer, puisque *k* E & *k E* sont les deux côtez de l'angle partagé par la moitié, & que *k* K est la ligne entiere qui le partage, & *k c* sa partie.

Corollaire.

41. Si l'angle inscrit étoit Isoscele, chaque côté seroit moyen proportionel entre la toute qui le diviseroit par la moitié, & sa partie.

Car le côtez de l'angle étant égaux, les prendre tous-deux, ou en prendre un deux fois, c'est la même chose.

Mais quand l'angle inscrit est Isoscele, la ligne qui le partage par la moitié est necessairement un diametre. Et de plus les deux points E *E* étant alors également distans de *k* aussi bien que de K, cela revient à ce qui a été demontré plus haut par une autre voie, & à ce qui le sera encore plus bas.

XI. The-

XI. Theoréme.

Si du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypotenuse, il y aura trois moyennes proportionelles. LII.

1. La perpendiculaire, entre les deux parties de l'hypotenuse.

2. Le petit côté de l'angle droit, entre la plus petite partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

3. Le plus grand côté de l'angle droit, entre la plus grande partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

Tout cela se peut prouver par un grand nombre de voies. Mais celle-cy me semble la plus facile & la moins embarassée:

Soit l'angle droit *k E* K, & la perpendiculaire du sommet à l'hypotenuse *E c*.

Si on fait un Cercle qui ait l'hypotenuse *k* K pour diametre, le sommet *E* se trouvera dans la circonference, par IX. 32.

Et si on prolonge *E c* jusques à E, que je suppose être le point opposé de la circonference, la corde *E* E sera coupée en *c* par la moitié, & les points *E* E également distans tant de *k* que de K.

Donc 1. par 29. *sup.*

kc. Ec. :: *Ec. c*K.

Donc 2. par le 6.e Theoréme (43. *sup.*)

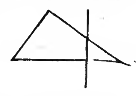
K*c.* K*E.* :: K*E.* K*k.*

Donc 3. par le même 6.e Theoréme,

kc. kE. :: *kE. k*K.

XII Theoréme.

LIII. Toute ligne qui coupant perpendiculairement l'hypotenuſe d'un Angle droit en coupe auſſi un côté, les coupe *reciproquement* ; c'eſt à dire que l'hypotenuſe entiere & ſa partie vers le point qui lui eſt commun avec le côté coupé, ſont reciproques au côté coupé entier, & à ſa même partie vers le point commun. La preuve en eſt facile par le 5.e Theoréme (39. & 40. *ſup.*) en décrivant un Cercle qui ait cette hypotenuſe pour diametre, & prolongeant la coupante, qui tiendra lieu *d'Indefinie y* ; elle ſe peut faire encore par d'autres voies, que je laiſſe à trouver.



Dernier Theoréme.

LIV. Un Angle ayant deux baſes, ſi ſes côtez ſelon une baſe ſont proportionnels à ſes côtez ſel on l'autre baſe, les deux angles ſur une baſe ſont égaux aux deux angles ſur l'autre baſe, chacun à chacun. C'eſt la converſe de la plûpart des Propoſitions de ce Livre, qui ſe prouve ainſi :

Les côtez ſur une baſe ne ſçauroient être proportionels aux côtez ſur l'autre baſe qu'en deux manieres.

La 1.re eſt, quand la toute d'une part & ſa partie ſont proportionelles à l'autre toute & à ſa partie.

La

La 2.e quand une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

Or le premier cas ne peut être, que les bases ne soient paralleles. Et le second, qu'elles ne soient antiparalleles. Et en l'un & en l'autre les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base.

Preuve du premier Cas.

Soit l'Angle *f* K *g*, dont les deux bases soient *f g* & *c d*. Je dis que ces bases sont paralleles, si LV.

K*f*. K*c*. :: K*g*. K*d*.

Car soit menée du point *c* une parallele à *f g*, qui coupe K*g* en un point que j'appelleray *x*.

K
x
c
d
f
g

Il est certain (par X. 20.) que

K*f*. K*c*. :: K*g*. K*x*.

Or par l'hypothese,

K*f*. K*c*. :: K*g*. K*d*.

Donc K*g*. K*x*. :: K*g*. K*d*. (II. 26.)

Donc K*x* & K*d* sont égales, par II. 28.

Donc les points *x* & *d* ne sont qu'un même point.

Donc *c x* & *c d* ne sont que la même ligne.

Or *c x* est parallele à *f g*. Donc *c d* luy est aussi parallele.

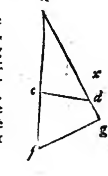
Donc les angles sur la base *c d* sont égaux aux angles sur la base *f g*. Ce qu'il falloit demontrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

LVI. SOIT l'angle *f*K*g*, qui ait deux bases *fg* & *cd*. Je dis que ces bases sont antiparalleles, si

K*f*.K*d*. :: K*g*.K*c*.

Car soit tirée du point *c* une ligne qui coupant K*g*, prolongée s'il est besoin, fasse sur K*g* un angle égal à celuy que *gf* fait sur K*f*, & que le point où cette ligne coupera K*g* soit *x*. Cette ligne *cx* sera une base de l'angle K antiparallele à la base *fg*; & par consequent (par 18. *sup.*)



K*f*. K*x*. :: K*g*. K*c*.

Or par l'hypothese,

K*f*. K*d*. :: K*g*. K*c*.

Donc K*f*.K*x*. :: K*f*. K*d*. (II. 26.)

Donc, par II. 28. K*x* est égale à K*d*.

Donc les points *x* & *d* étant sur la même ligne, ne sont qu'un même point.

Donc *cx* & *cd* ne sont qu'une même ligne.

Or *cx* est antiparallele à *fg*.

Donc *cd* est aussi antiparallele à *fg*.

Donc les angles sur la base *cd* sont égaux aux angles sur la base *fg*. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

LVII. SI deux angles égaux ont leur côtez proportionels, ils sont semblables; c'est à dire que les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun.

Soient les angles égaux qui ayent leurs côtez proportionels *f*K*g*, & *ckd*, ensorte que K*f*. *kc*. :: K*g*. *kd*.

D'où

D'où il s'ensuit que si K *f* est plus grand que *k c*, K *g* sera plus grand que *k d*. Prenant donc dans K *f*, K *c* égale à *k c*; & dans K *g*, K *d* égale à *k d*: les angles *c* K *d* & *c k d* étant égaux, & les côtez de l'un étant égaux à ceux de l'autre, leurs bases seront égales, (VIII. 67.) & les angles sur la base de l'un égaux aux angles sur la base de l'autre, par VIII. 66.

K
c
d
f
g

k
c
d

Or par le precedent Theoréme les deux bases de l'angle K, sçavoir la base *c d* & la base *f g*, sont paralleles, & les angles sur l'une sont égaux aux angles sur l'autre.

Donc dans les deux angles égaux K & *k* les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre. Ce qu'il falloit demontrer.

Remarquez que ce dernier Theoréme & son Corollaire sont les converses des principaux Theorémes de ce Livre & du Livre precedent, & qu'ils seront de grand usage dans la suite.

SECTION VI.

Problemes.

I. PROBLEME.

TROUVER la moyenne proportionelle entre deux lignes données. Joindre les lignes données. Faire un demy-cercle, dont prises ensemble elles soient le diametre. La XVIII.

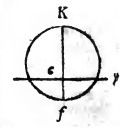
perpendiculaire élevée du point où se joignent ces lignes à la circonference sera la moyenne proportionelle entre ces lignes données (par 29. *sup.*)

On peut employer pour trouver la même chose les Theorémes 6.e & 8.e *sup.* & d'autres encore. J'en laisse la recherche pour exercer l'Esprit.

II. Probleme.

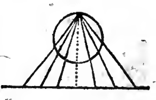
LIX. Trouver toutes les reciproques possibles à deux lignes données.

Mettre la plus petite dans la plus grande, comme K *e* dans K *f*. Faire un Cercle qui ait la plus grande pour diametre. Et du point *e*, où la plus petite se termine, tirer sur ce diametre une perpendiculaire indefinie comme *y*. Cette perpendiculaire satisfera au Probleme, comme on le peut juger, en considerant le 5.e Theoréme (39. 40. 41. &c. *sup.*) sans qu'il soit besoin que je m'amuse à l'expliquer davantage.



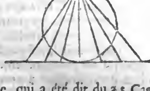
III. Probleme.

LX. Ayant tiré à discretion d'un même point tant de lignes que l'on voudra sur une même ligne : les diviser toutes, ensorte que chaque toute & sa partie vers le point commun soient reciproques à chaque autre toute & à sa même partie.



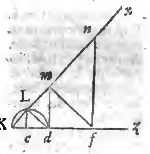
Tout

Tout Cercle dont la circonference passera par le point commun, & qui aura pour diametre, ou la perpendiculaire entiere tirée de ce point sur la ligne, ou une partie de cette perpendiculaire, satisfera au Probleme, par le 7.e Theoréme, & ce qui a été dit du 3.e Cas (48. *sup.*)



IV. PROBLEME.

AYANT les trois premieres lignes d'une Progression Geometrique, trouver toutes les autres à l'infini. LXI.



Faire que la 2.e comprenne la 1.re, comme K *d* comprend K *e*. Faire un Cercle qui ait K *d* pour diametre. De *e* élever la perpendiculaire *e*L; & puis tirer une ligne indefinie de K par L, laquelle j'appelleray *x*; & prolonger aussi indefiniment K *d*, laquelle j'appelleray *z*.

Tirant L *d* perpendiculaire sur *x*, & *dm* perpendiculaire sur *z*, & *mf* perpendiculaire sur *x*, & *fn* perpendiculaire sur *z*, & ainsi à l'infini:

On trouvera facilement (par 52. *sup.*) la suite infinie de la Progression Geometrique; dont les trois premiers termes auront été K *c*. K L. K *d*. qui seront suivis de K *m*. K *f*. K *n*. K *g*. &c.

V. Probleme.

LXII. Diviser une ligne donnée en moyenne & extreme raison. C'est à dire en telle sorte que sa plus grande partie soit moyenne proportionelle entre la plus petite partie & la toute.

Ce qui est aussi la même chose que de trouver une ligne qui soit moyenne entre une donnée, & cette donnée moins cette moyenne, laquelle pour cette raison j'appelleray *la mediane*.

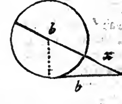
Soit la ligne donnée appellée *b*.

Sa plus grande partie que l'on cherche, *x*.

Et sa plus petite, *b*—*x*.

Il faut trouver une ligne qui soit telle, que *b* moins cette ligne, soit à cette ligne: comme cette ligne est à *b*.

b—*x*. *x*. :: *x*. *b*.



C'est ce qui se peut trouver par une voie fort facile.

Décrire un Cercle de l'intervalle de la moitié de *b*, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de *b*.

Et tirer une secante de l'autre extremité de *b*, qui passant par le centre du Cercle se termine à la circonference.

La partie de cette secante qui est hors le Cercle sera *x*. C'est à dire moyenne proportionelle entre *b*, & *b*—*x*.

Car 1. par la construction *b* est tangente de ce Cercle.

2. Le diametre de ce Cercle est égal à *b*.

3. Et par consequent la secante entiere est *x*+*b*.

Or (par 33. *sup.*) *b* tangente est moyenne proportionelle entre la partie de la secante qui est hors le Cercle, (c'est à dire *x*,) & la secante entiere, (c'est à dire *x*+*b*.)

Donc

Donc $x. b. :: b. x+b.$
Donc *permutando*, $b. x. :: x+b. b.$
Donc *dividendo*, $b-x. x. :: x. b.$
Ce qu'il falloit demontrer.

I. COROLLAIRE.

UNE ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, si on y ajoûte sa plus grande partie, (que nous appellerons *la mediane* :) il s'en fera une nouvelle toute qui sera encore divisée en moyenne & extreme raison, la premiere toute étant la mediane. LXIII.

C'est ce qui se voit par la voie même dont on s'est servi pour diviser la premiere toute en moyenne & extreme raison ; ensorte qu'il ne faut que recomposer, pour parser ainsi, ce que l'on a divisé.

Car si $b-x. x. :: x. b.$

Componendo, $b. x. :: x+b. b.$

Donc *permutando*, $x. b. :: b. x+b.$

Donc la ligne $x+b$ est divisée par b en moyenne & extreme raison, puisque b est moyenne proportionelle entre la toute $x+b$, & son autre partie x.

II. COROLLAIRE.

UNE ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, sa petite partie divise la mediane en moyenne & extreme raison. LXIV.

Soit b divisée comme dessus ; & comme sa mediane est appellée x, soit la petite partie appellée y. Il faut prouver que $x-y. y. :: y. x.$

Or il ne faut pour cela que nommer b par ses parties $y+x$.

Car, par la division de b par x en moyenne & extreme raison, $y. x :: x. y+x.$

Donc *permutando*, $x. y. :: y+x. x.$

Donc *dividendo*, $x-y. y. :: y. x.$ Ce qu'il falloit demontrer.

III. Corollaire.

LXV. Il est aisé de conclure de ces deux Corollaires que lorsqu'on a une ligne divisée en moyenne & extreme raison, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes & plus petites divisées de la même sorte.

PREUVE DES PLUS GRANDES.

LXVI. Si on joint la mediane à la premiere toute, il s'en fait une seconde toute qui a la premiere pour sa mediane, (par le premier Corollaire.)

Donc si on joint la premiere toute à la deuxiéme, il s'en fait une troisiéme qui a la deuxiéme pour sa mediane.

Et joignant la deuxiéme à la troisiéme, il s'en fait une quatriéme qui a la troisiéme pour sa mediane, & ainsi à l'infini.

PREUVE DES PLUS PETITES.

Si on prend la mediane de la premiere toute, il s'en fait une seconde toute plus petite, qui a pour sa mediane (par le deuxiéme Corollaire,) la petite partie de la premiere toute.

Et cette mediane de la deuxiéme toute est une troisiéme toute qui a pour sa mediane la petite partie de la deuxiéme toute; & cette mediane de la troisiéme toute est une quatriéme toute, qui a pour sa mediane la petite partie de la troisiéme toute, & ainsi à l'infini. Ce qui peut-être consideré comme une nouvelle & trés-belle preuve de la divisibilité d'une ligne à l'infini.

VI. Pro-

VI. PROBLEME.

AYANT la grandeur des côtez d'un angle qui LXVII.
doive être la moitié de chacun des angles sur la base, en trouver la base.

Soit K *b* la grandeur de ces côtez ; & soit décrite une portion de Cercle de cét intervalle & du centre K.

Soit divisée K *b* en *c*, en moyenne & extreme raison, ensorte que

bc. *c*K. :: *c*K. *b*K.

La corde *bd* de la grandeur de *c*K, qui est la moyenne entre *bc* & *b*K, sera la base de cét angle, & K *d* en sera l'autre côté.

Car soit tirée la ligne *cd* : je suppose que les deux angles sur la base d'un angle Isoscele sont égaux. Et ainsi j'auray prouvé que l'angle K est la moitié de chacun des angles sur la base, si je puis montrer deux choses :

La 1.re Que l'angle K est égal à l'angle *bdc*.

La 2.e Que l'angle *bdc* est la moitié de l'angle *bd*K.

PREUVE DE LA PREMIERE.

L'angle *b* a deux bases, *cd* & K *d* ; & ses côtez selon une base sont proportionnels à ses côtez selon l'autre base, puisque par la construction

bc. *bd*. :: *bd*. *b*K.

Donc les bases *cd* & K *d* sont antiparalleles ; & par consequent les angles sur l'une sont égaux aux angles sur l'autre, chacun à chacun.



Donc l'angle K est égal à l'angle *bdc*. Ce qui est la premiere chose qu'il falloit demontrer.

PREUVE DE LA SECONDE.

Les deux parties de bK, base de l'angle de bdK, sont en même raison que les deux côtez de cét angle: puisque dK étant égale à bK, & cK à bd,

$bc.\ c$K. :: $bd.\ d$K.

Donc l'angle $b\ d$ K est divisé par la moitié. (X. 33.)

Donc l'angle K étant égal à l'angle bdc, qui est la moitié de l'angle bdK, est aussi la moitié de l'angle bdK. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

XXVIII. TOUT angle Isoscele dont la base est moyenne proportionelle entre le côté entier & le côté moins cette base, est de 36 degrez; & chacun des angles sur la base est de 72. Car 36, plus deux fois 72 qui est le double de 36, vaut 180, qui est ce que valent les trois angles pris ensemble.

VII. PROBLEME.

XXIX. AYANT la base d'un angle Isoscele de 36 degrez, en trouver le côté.

Soit b la base donnée divisée en moyenne & extréme raison, & x en soit la plus grande partie; $x+b$ sera le côté de cét angle. C'est à dire que l'angle qui aura $x+b$ pour l'un & l'autre de ses côtez, & b pour base, sera de 36 degrez.

Car puisque par la division de b en moyenne & extreme raison $b-x.\ x. :: x.\ b.$

Componendo, $b.\ x. :: x+b.\ b.$

Donc *permutando*, $x.\ b. :: b.\ x+b.$

Donc la base b est moyenne proportionelle entre le côté $x+b$ & x, qui est le côté moins b.

Donc, par le precedent Corollaire, l'angle qui a $x+b$ pour chaque côté, & b pour base, est de 36 degrez. Ce qu'il falloit demontrer.

SEC-

SECTION VII.

Des Lignes Incommensurables.

Ce que nous avons dit des Grandeurs Incommensurables dans le IV. Livre donne une si grande facilité d'expliquer les Lignes Incommensurables, qu'il ne faut pour cela qu'ajoûter à ce Livre trois ou quatre Propositions.

PROPOSITION GENERALE.

Lorsque trois lignes sont continuëment proportionelles, la raison de la premiere à la troisiéme peut-être de trois sortes : ce qui se fait en trois cas. LXX.

Premier Cas.

Si la raison de la premiere à la troisiéme est une raison de nombre à nombre qui ait pour ses exposans des nombres quarrez : la moyenne est à chacune des deux autres, comme le produit des racines de ces nombres quarrez, est à chacun de ces nombres quarrez ; & par consequent la moyenne est commensurable aux deux autres.

Second Cas.

Si la raison de la 1.re à la 3.e est une raison de nombre à nombre, qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrez : la moyenne est incommensurable en longueur & commensurable en puissance à la 1.re & à la 3.e

Troisiéme Cas.

Si la raison de la 1.re à la 3.e est une raison sourde, & non de nombre à nombre : la moyenne est incommensurable aux deux autres, tant en longueur qu'en puissance. Tous

Tous ces 3 Cas se prouvent des lignes, de la même sorte qu'on les a prouvez des grandeurs en general dans le IV. Livre. C'est pourquoi ce qui reste ici est d'appliquer cette doctrine generale à des exemples particuliers qui soient propres aux lignes. Ce que nous ferons par les Theorémes suivans.

I. Theoréme.

XXXI. Un angle droit étant Isoscele, le côté & l'hypotenuse sont incommensurables en longueur, & commensurables en puissance.

Soit un angle droit Isoscele, dont
L'hypotenuse soit appellée *b*.
Le côté *d*.

La perpendiculaire du sommet à l'hypotenuse la partagera en deux également. Chaque moitié soit appellée *m*.

Donc ∺ *b. d. m.* (52. *sup.*)
Or *b. m.* :: 2. 1.

Donc 2 & 1 n'étant pas deux nombres quarrez: par le 2.[e] Cas *d* est incommensurable en longueur à *b* & à *m*.

Mais il leur est commensurable en puissance; parce que par III. 34.

$$\left.\begin{matrix} hh.\ d\ d. \\ dd.\ mm. \end{matrix}\right\} :: b.\ m. :: 2.\ 1.$$

II. Theoréme.

XXXII. Quand l'hypotenuse est à l'un des côtez d'un angle droit, comme nombre à nombre, il est aisé de juger si l'autre côté est commensurable ou incommensurable à l'hypotenuse. Et voici comment :

Soit l'hypotenuse *b*.
Un des côtez *c*.
L'autre côté *d*.

Un

Une perpendiculaire étant menée du sommet à l'hypotenuse,
Soit sa portion vers *c* appellée *k*.
Et l'autre vers *d* appellée *l*.

Il s'ensuit que $\begin{cases} \div\ b.\ c.\ k. \\ \div\ b.\ d.\ l. \end{cases}$

Supposant donc que *b* & *c* soient comme les deux nombres *x* & *z*, c'est à dire que

$b.\ c.\ ::\ x.\ z.$

Donc la raison de *b. k.* étant doublée de la raison de *b. c.* (III. 24.)

$b.\ k.\ ::\ xx.\ zz.$ (III. 31.)

Donc $b.\ b—k.\ ::\ xx.\ xx—zz.$ (II. 48.)

Or *k* & *l* étant les deux portions de *b*,

$l = b—k.$

Donc $b.\ l.\ ::\ xx.\ xx—zz.$

Donc si $xx—zz$ est un nombre quarré : par le premier Cas de la Proposition generale, *b* est commensurable à *d*.

Que si au contraire $xx—zz$ n'est pas un nombre quarré : par le deuxiéme Cas *b* n'est point commensurable à *d* en longueur, mais seulement en puissance.

III. THEORÉME.

LORSQU'un des côtez de l'angle droit est une aliquote de l'hypotenuse, l'autre côté est incommensurable à l'hypotenuse en longueur, & commensurable seulement en puissance. LXXIII.

Car afin que *c* par exemple, soit une aliquote de *b*, il faut que *b* soit à *c*, comme quelque nombre à l'unité que je le marqueray par un 1. (*Voyez la fig. precedente.*)

Soit donc $b.\ c.\ ::\ x.\ 1.$

Donc $b.\ k.\ ;:\ xx.\ 11.$ (III. 31.)

Donc

Donc $b. \ b-k. :: xx. \ xx-11.$ (II. 48.)

Or $l = b-k.$

Donc $b. \ l. :: xx. \ xx-11.$

Or il eſt impoſſible que $xx-11$ ſoit un nombre quarré. Car (11) ne fait qu'une unité, ſelon ce qui a été dit, IV. 9. Et deux nombres quarrez ne peuvent jamais être differens ſeulement d'une unité.

Donc, par le ſecond Cas de la Propoſition Generale, *b* & *d* ſont incommenſurables en longueur, & commenſurables ſeulement en puiſſance.

COROLLAIRE.

LXXIV. Si la baſe d'un angle Iſoſcele eſt égale au côté: la perpendiculaire du ſommet à la baſe eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance, avec le côté.

Car alors cette perpendiculaire fait un angle droit avec la moitié de la baſe, & l'un ou l'autre des côtez eſt l'hypotenuſe de cét angle droit.

Donc l'un des côtez de cét angle droit, qui eſt la moitié de la baſe, eſt auſſi la moitié de l'hypotenuſe.

Donc il eſt une aliquote de l'hypotenuſe.

Donc, par le Theoréme precedent, l'autre côté, qui eſt la perpendiculaire, eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance, avec l'hypotenuſe de cét angle droit, laquelle eſt le côté de l'angle dont la baſe eſt ſuppoſée égale à chaque côté.

IV. Theo-

IV. THEORÉME.

AYANT deux lignes incommenſurables en longueur, (ou par les Theorémes precedens, ou par d'autres voies,) & ayant trouvé la moyenne proportionelle entre ces deux lignes: elle leur ſera incommenſurable tant en longueur, qu'en puiſſance. LXXV.

Cela eſt clair par le 3.e Cas de la Propoſition generale.

V. THEORÉME.

QUAND une ligne eſt diviſée en moyenne & extreme raiſon, la toute & ſes deux parties ſont incommenſurables les unes aux autres. C'eſt ce qui a éte prouvé dans le IV. Livre, Nomb. 36. LXXVI.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a à dire de quatre lignes continuëment proportionelles, que ce qui a été dit dans le IV. Livre de quatre grandeurs continuëment proportionelles.



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DOUZIE'ME.

DES FIGURES EN GENERAL CONSIDERE'ES SELON LEURS ANGLES ET LEURS CÔTEZ.

1. ON appelle *Figure* dans les élemens de Geometrie, une surface plate terminée de tous côtez.

Ce qui comprend deux choses : la premiere, les extremitez de cette surface : la seconde, l'espace qu'elle comprend ; ce qui s'appelle *l'aire de la figure.*

Nous les considerons dans ce Livre & le suivant selon le premier rapport ; & dans d'autres Livres nous les considererons selon le dernier.

Division.

Toute figure considerée selon ses extremitez, est, II.
Ou rectiligne:
Ou curviligne:
Ou mixte.

PREMIERE DEFINITION.

On appelle rectiligne celle qui est terminée par des lignes droites, qui ne peuvent être moins de trois; étant clair que deux lignes droites ne peuvent pas terminer un espace de tous côtez, puisqu'elles ne peuvent se rencontrer qu'en un point, ce qui laisse l'espace ouvert du côté opposé à ce point. III.

Il est clair aussi par là, que les lignes droites ne peuvent terminer un espace, qu'en faisant autant d'angles qu'il y a de lignes droites qui terminent l'espace. Car si un angle demande deux lignes, une ligne sert à deux angles.

Et ainsi l'on peut considerer trois choses dans l'extremité d'une figure rectiligne. 1. Les angles. 2. Les côtez. 3. Le circuit, qu'on appelle aussi *perimetre*, qui n'est autre chose que la somme des côtez; c'est à dire tous les côtez pris ensemble.

Seconde Definition.

On appelle curviligne celle qui est terminée par une ou plusieurs lignes courbes. Et une seule ligne courbe pouvant rentrer en soy-même peut terminer un espace. IV.

Mais on ne considere icy des figures curvilignes que le seul Cercle; parce que de toutes les lignes courbes on ne considere que la circulaire.

Troi-

TROISIÉME DEFINITION.

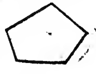
V. ON appelle figure mixte celle qui est terminée en partie par des lignes droites, & en partie par des courbes; dont on ne considere ici que les portions de Cercle, qui sont celles qui sont terminées par une corde & une portion de circonference: ou les secteurs du Cercle, qui sont terminez par deux rayons & une portion de la circonference, tel qu'est un quart de Cercle.

DES FIGURES RECTILIGNES.

VI. ON peut diviser les figures rectilignes en celles qui ont quelque angle r'entrant, & celles dont tous les angles sont saillans; c'est à dire tels que leur pointe regarde toûjours le dehors de la figure.



Les Geometres se sont restraints à considerer les dernieres, parce qu'on y peut facilement reduire les premieres.



ESPECES DES FIGURES RECTILIGNES.

VII. TOUTE figure rectiligne ayant autant d'angles que de côtez, on les divise indifferemment par le nombre [illegible] ou de leurs côtez, & on les nomme selon l'un ou selon l'autre.

Ainsi on appelle *Triangle*, une figure de trois angles & de trois côtez; & *Quadrilatere*, celle de quatre angles & de quatre côtez.

Les

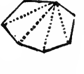
Les noms Grecs des figures sont pris du nombre des angles : comme

Pentagone, de cinq.
Hexagone, de six.
Heptagone, de sept.
Octogone, de huit.
Enneagone, de neuf.
Decagone, de dix.
Et *Polygone*, de plusieurs angles indeterminément.

Ces noms sont si communs, qu'il est bon de ne les pas ignorer ; mais on peut se passer d'en sçavoir d'autres qui sont moins communs : & appeller les figures du nombre de leurs côtez ou de leurs angles, une figure de quinze côtez, de trente, de cent ; de mille &c.

I. Theoréme.

Tout Polygone peut-être resolu en autant de Triangles, qu'il a de côtez, moins deux, & il ne le peut-être en moins. VIII.



C'est à dire, que s'il a 4 côtez, il peut-être resolu en deux Triangles ; si 5, en trois ; si 6, en quatre ; si 7, en cinq ; si 8, en six &c.

Car d'un angle quelconque tirant deux lignes de part & d'autre, qui soûtiennent chacune l'angle qui le suit de part & d'autre, il s'en fait deux Triangles qui comprennent 4 côtez de la figure. Mais de ce même angle menant des lignes à chacun des autres angles, il s'en fait autant de Triangles qu'il y a de côtez outre ces 4. Donc il y aura autant de Triangl[illegible]ôtez outre ces 4. Donc il y au[illegible]tant de Triangles que de côtez, moins deux ; puisqu'il y a necessairement deux de ces Triangles qui comprennent 4 de ces côtez.

II. Theo-

II. Theoréme.

IX. Tous les angles d'un Polygone quelconque sont égaux à autant de droits, que le double de ces côtez moins quatre.

Car nous avons déja veu qu'un angle plus les deux angles que font ses côtez sur sa base, sont égaux à deux droits. (VIII. 62.) Or un angle avec sa base n'est point different d'un Triangle. Et par consequent les trois angles d'un Triangle valent deux angles droits, qui sont six moins quatre.

Or par le precedent Theoréme tout autre Polygone peut être resolu en autant de Triangles, moins deux, qu'il a de côtez; & les angles de ces Triangles comprendront ceux du Polygone. Donc si le Polygone a 7 côtez: étant resolu en 5 Triangles, les angles de ces 5 Triangles en vaudront dix droits, qui sont 14 moins 4.

On le peut encore demontrer d'une autre sorte, en prenant un point quelconque au dedans du Polygone, & de ce point menant des lignes à tous les angles. Car alors l'Heptagone sera partagé en 7 Triangles, qui tous auront deux de leurs angles autour de la figure, & le 3.e au dedans. Or tous les 21 angles de ces 7 Triangles en valent 14 droits; & les 7 du dedans de la figure valent 4 droits; (& quand il y en auroit mille, ou tant que l'on voudra, ils ne vaudront jamais que 4 droits, par VIII. 18.) Donc les 14 autres, qui sont égaux à ceux de l'Heptagone, valent 14 droits moins 4; c'est à dire 10 droits.

Division.

Les figures de ces di[illegible]s especes se peuvent considerer ou chacune à part, ou en les comparant deux ensemble.

FIGU-

FIGURES CONSIDERE'ES 'A PART.

DÉFINITIONS.

1. CELLES dont tous les angles sont égaux, s'apellent *Equiangles*. I.

2. Celles dont tous les côtez sont égaux, s'apellent *Equilateres*.

3. Celles qui sont tout-ensemble équiangles & équilateres, s'apellent *Regulieres*.

Et on met aussi le Cercle entre les regulieres, à cause de sa parfaite uniformité, & qu'on le peut considerer comme un Polygone regulier d'une infinité de côtez.

4. Celles dont les angles ou les côtez seroient alternativement égaux; c'est à dire le premier égal au 3.e 5.e 7.e 9.e & le second égal au 4.e 6.e 8.e 10.e se peuvent apeller *alternativement équiangles* ou *équilateres*.

Mais il faut remarquer que cela ne peut-être que quand le nombre des angles ou des côtez est pair. Car s'il étoit impair, le dernier & le premier se trouveroient égaux; & par consequent le penultiéme & le premier seroient inégaux: & par consequent ils ne seroient pas tous alternativement égaux.

FIGURES COMPARE'ES.

DEFINITIONS.

QUAND on com[illegible]eux figures de même genre, c'est à dire d'un nombre égal de côtez: XI.

1. Si les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre, on les apelle *Equiangles*; & ce mot

Q ne

ne marque pas alors que les angles de châque figure sont égaux entr'eux ; mais seulement que ceux de l'une sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

2. Si les côtez de l'une sont égaux aux côtez de l'autre, on les apelle *Equilateres*, ou *Equilateres entr'elles*.

3. Si elles sont tout-ensemble équiangles & équilateres entr'elles, on les peut apeller *Tout-égales* ; ce qu'il faut bien distinguer de celles qu'on apelle simplement *Egales*.

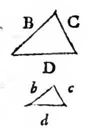
4. Si elles sont équiangles, & que les côtez de l'une soient proportionels aux côtez de l'autre, on les apelle *Semblables*.

Ce qui fait voir que les *tout-égales* sont toûjours *semblables*, puisqu'il y a même raison entre les côtez de l'une & de l'autre, qui est la raison d'égalité. Au lieu que les *semblables* ne sont pas toûjours *tout-égales* : puisqu'il peut y avoir une autre raison que celle d'égalité, qui soit la même entre les côtez de l'une & de l'autre.

Les côtez des figures semblables, entre lesquels il y a même raison, s'apellent les côtez *Homologues*, qui sont toûjours le plus grand côté de l'une & de l'autre : & toûjours ainsi. Et c'est ce qui produit ce Theoréme ;

I. Theoréme,

XII. Les circuits de deux figures semblables sont en même raison que leurs côtez homologues.



Car soient les trois côtez de l'une de ces figures, [illegible] ; & de l'autre *b*, *c*, *d*.

Puisque B est à *b*, comme C à *c*, & D à *d* :

Les.

Les trois d'une part, (qui font le circuit de la premiere figure,) sont aux trois de l'autre part, (qui font le circuit de la seconde,) en même raison que chacun d'une part à chacun de l'autre. C'est ce qui a été demontré II. 52.

Autres Definitions.

Quand on compare deux figures de même ou de differentes especes: XIII.

5. Si le circuit de l'une est égal au circuit de l'autre, on les apelle *Isoperimetres.*

6. Si l'espace que comprend l'une est égal à l'espace que comprend l'autre, on les appelle *égales.* Ce qui appartient au Livre où l'on traitera des figures considerées selon l'*aire.* Et ce qu'il ne faut pas confondre, comme il a déja été dit, avec celles qu'on appelle *tout-égales.*

DES FIGURES INSCRITES OU CIRCONSCRITES AU CERCLE.

Des Inscrites.

On dit qu'une figure rectiligne est *inscrite au Cercle*, quand les sommets de ses angles se trouvent dans la circonference de ce Cercle. D'où il s'ensuit, XIV.

1. Que les angles de cette figure inscrite se doivent alors considerer comme des angles inscrits au Cercle, dont il a été [illegible] dans le Livre IX.

2. Qu'ainsi les angles d'une figure inscrite ne sçauroient être égaux, que quand les deux arcs que soûtiennent les deux côtez de chaque angle sont égaux, pris ensemble, aux deux arcs que soûtiennent

les deux côtez de chaque autre angle : parce que chacun de ces angles a pour mesure la demi-circonference, moins la moitié des deux arcs que soûtiennent ses côtez. IX. 19. D'où s'ensuit ce Theoréme :

II. Theoréme.

XV. Une figure inscrite au Cercle ne sçauroit être équiangle, qu'elle ne soit équilaterale, ou absolument, ou alternativement ; & en ce dernier cas, il faut que le nombre de ses côtez soit pair.

Car afin que les angles d'une figure inscrite au Cercle, (qui sont des angles inscrits,) soient tous égaux : il faut & il suffit que les deux arcs que soûtiennent les côtez de chaque angle pris ensemble soient égaux aux arcs que soûtiennent aussi les côtez de tout autre angle, comme il vient d'être dit.

Or cela est quand tous ces arcs sont égaux : ce qui arrive quand la figure est absolument équilaterale ; parce que tous ses côtez étant égaux, tous les arcs qu'ils soûtiennent le sont aussi.

Mais cela arrive encore quand ces arcs ne sont qu'alternativement égaux, pourveu qu'ils soient en nombre pair ; parce qu'alors la moitié de ces arcs étant petits & tous égaux entr'eux, & l'autre moitié étant plus grands & tous égaux aussi entr'eux, & [illegible] toûjours suivi d'un grand: les deux arcs soûtenus par les côtez d'un angle inscrit pris ensemble, seront toûjours égaux à deux autres arcs soûtenus par les côtez de tout autre angle. Et ainsi ces angles seront égaux. Or pour cela

cela il ſuffit que les côtez de la figure ſoient alternativement égaux ; parce qu'alors ils ſoûtiendront des arcs alternativement égaux.

Mais il eſt bien viſible qu'il faut en ce cas-là que le nombre des côtez ſoit pair. Car s'il étoit impair, comme de 9 : il y auroit neceſſairement deux côtez, ſçavoir le 1.er & le 9.e qui ſeroient de ſuite tous-deux grands, ou tous-deux petits ; & ainſi l'angle compris entre le 1.er & le 9.e côté ſeroit ou plus grand, ou plus petit, que les autres.

Donc une figure inſcrite en un Cercle ne ſçauroit être équiangle, ſi elle n'eſt ou abſolument équilaterale ou alternativement ; & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes côtez ſoit pair.

DES CIRCONSCRITES AU CERCLE.

ON dit qu'une figure eſt *circonſcrite à un Cercle*, quand tous les côtez de la figure touchent le Cercle. Et de-là il s'enſuit, XVI.

1. Que les angles de la figure ſont des angles circonſcrits ; & par conſequent il eſt bon de les conſiderer comme des angles compris entre deux tangentes, que l'on doit prendre comme ſi chacune étoit terminée au point de l'attouchement. D'où il s'enſuit encore,

2. Que ces angles circonſcrits ſont toûjours Iſoſceles ; parce que les tangentes menées d'un même point ſont égales, VII. 39.

3. Que les angles circonſcrits ſont égaux, quand les tangentes de l'un ſont égales aux tangentes de l'autre. IX. 57.

4. Que chaque côté d[illegible]ſcrite eſt compoſé de deux tan[illegible], qui viennent de deux differens angles.

Et de là s'enſuit ce Theoréme :

III. Theoréme.

XVII. Une figure circonſcrite au Cercle ne ſçauroit être équilaterale, qu'elle ne ſoit équiangle, ou abſolument ou alternativement ; & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes angles ſoit pair.

Car afin qu'une figure circonſcrite au Cercle ſoit équilaterale, il faut & il ſuffit que les deux tangentes dont eſt composé chaque côté de cette figure circonſcrite priſes enſemble, ſoient égales aux deux autres tangentes dont ſera composé tout autre côté.

Or cela eſt quand toutes ces tangentes ſont égales, ce qui arrive quand tous les angles de cette figure ſont égaux ; car alors toutes les tangentes ſont égales auſſi.

Mais cela arrive encore quand les angles de la figure ne ſont qu'alternativement égaux, pourveu qu'ils ſoient en nombre pair, en ſorte que la moitié des angles n'ait que deux petites tangentes, (ce qui fait neanmoins les plus grands angles,) & l'autre moitié deux plus grandes tangentes, & que toutes les petites ſoient égales entr'elles, & les grandes auſſi, & qu'un petit angle ſoit toûjours ſuivi d'un grand.

Car alors chaque côté ſera composé d'une petite & d'une grande tangente, (parce que chaque côté, comme il a été dit, eſt composé de deux tangentes [illegible] de deux differens angles.) Donc tous les côtez ſeron[illegible]aux.

Donc une figure circonſcrite au Cercle ne peut-être équilaterale, ſi elle n'eſt équiangle, ou abſolument

lument ou alternativement ; & en ce dernier cas il faut que le nombre des angles soit pair. Ce qu'il falloit demontrer.

Des Figures Regulieres.

Le meilleur moyen de bien concevoir les figures regulieres, est de les considerer comme inscrites en un Cercle ; parce qu'elles peuvent toutes y être inscrites, selon ce Theoréme : XVIII.

IV. Theoréme.

Toute figure reguliere peut-être inscrite & circonscrite au Cercle ; parce qu'il y a toûjours dans ces figures un point qui en est le centre, dont toutes les lignes menées à tous les angles, (qu'on apelle *rayons*,) sont égales, & dont toutes les perpendiculaires menées au côté, (qu'on peut apeller *les rayons droits*,) sont aussi égales entr'elles. XIX.

Soit une figure reguliere de tant de côtez & d'angles que l'on voudra ; il suffira d'en considerer 4 ou 5 angles, dont j'appelleray les sommets ***b***, ***d***, ***f***, ***g***, ***h***.

Si de ***p*** milieu du côté ***b d***, & de ***q*** milieu du côté ***b h***, on éléve deux perpendiculaires, elles se rencontreront étant prolongées, par VI. 34.

Et le point ***c*** où elles se rencontrent sera le centre de la figure:

Car du point ***c***, intervalle ***c b***, décrivant une circonference, elle p[illegible] points ***h***, ***b***, ***d***. VII. 3.

Donc les trois rayons ***c b***, ***c h***, & ***c d***, seront égaux.

 Donc

Donc les 4 angles *c b b*, *c b h*, *c b d*, *c d b*, seront égaux, par VIII. 66.

Donc chacun de ces trois rayons *e b*, *c b*, *c d*, partage par la moitié l'angle de la figure.

Donc l'angle *c h g*, étant égal à l'angle *c h b*, *c g* base de l'angle *c h g*, doit être égale à *c b*, base de l'angle *c h b*, par VIII. 67.

Donc ce 4.e rayon *c g* est égal aux trois autres.

Et il est clair que quand cette figure reguliere auroit cent mille angles, on prouveroit la même chose de toutes les lignes menées de *c* aux angles, qui sont les rayons.

Donc si de ce point *c*, & de l'intervalle d'un rayon, on décrit un Cercle, la figure sera inscrite en ce Cercle, puisque tous les rayons étant égaux, les sommets de tous les angles se trouveront dans la circonference de ce Cercle.

Et delà il s'ensuit que tous les côtez de cette figure seront des cordes égales du même Cercle.

Donc les perpendiculaires du centre aux côtez sont égales, par VII. 10.

Or ces perpendiculaires en sont les rayons droits.

Donc si on décrit un autre Cercle de l'intervalle d'un rayon droit, c'est à dire d'une perpendiculaire à un côté: cette figure sera circonscrite à ce Cercle; puisque tous ces rayons droits étant égaux, il n'y aura aucun côté qui ne touche le Cercle.

COROLLAIRE.

XX. Il est [illegible] miner trois choses importantes dans chaque espece de figure reguliere.

La premiere, de combien de degrez est l'arc que

que soûtient le côté de la figure, que j'appelleray simplement *l'arc de la figure*.

La seconde, de combien de degrez est l'angle de la figure, c'est à dire l'angle compris entre les deux cotez de la figure.

La troisiéme, quel est aussi l'angle que fait un rayon sur un côté. C'est ce qui se verra par ces trois Problemes:

I. PROBLEME.

DETERMINER la grandeur de l'arc de toute espece de figure reguliere. XXI.

La circonference étant divisée en 360 degrez, ou 21600 minutes, ou 1296000 secondes : si on divise ce nombre par celui des côtez de la figure, le quotient fera voir de combien de degrez, ou de minutes, ou de secondes, est l'arc de la figure.

Ainsi l'arc d'une figure de 15 côtez est de 24 degrez; parce que 15 divisant 360, le quotient est 24.

L'arc d'une figure de 3600 côtez est de 6 minutes; parce que 21600 minutes étant divisées par 3600, le quotient est 6.

II. PROBLEME.

DETERMINER la grandeur de l'angle de toute espece de figure reguliere. XXII.

Ayant trouvé l'arc par le premier Probleme, ôter les degrez de cét arc de 180; qui est la demi-circonference; ce qui restera sera la mesure de l'angle de la figure.

Car tout angle d[illegible]gure reguliere [illegible]e consideré comme un angle Isoscele inscrit dans le Cercle, qui a pour mesure la demi-circonference, moins l'arc que soûtient un de ses côtez. IX. 19.

Et ainsi pour avoir la grandeur de l'angle d'une figure de 15 côtez, il ne faut qu'ôter de 180 les 24 degrez de l'arc que soûtient le côté de cette figure; & ce qui restera, qui est 156, sera la mesure de l'angle d'une figure de 15 côtez.

Et pour avoir l'angle d'une figure de 3600 côtez, il faut ôter 6 minutes de 180 degrez, & ce qui restera, qui est 179 d. 54'. sera la mesure de l'angle de cette figure.

III. Probleme.

XXIII. Determiner la grandeur de l'angle que fait le rayon sur le côté de toute figure reguliere.

Il ne faut pour cela que prendre la moitié du nombre des degrez que vaut l'angle de la figure. Parce que tout rayon partage par la moitié l'angle de la figure.

Ainsi l'angle du rayon sur le côté dans une figure de 15 côtez, est de 78 degrez, qui est la moitié de 156. Et l'angle du rayon sur le côté d'une figure de 3600 côtez, est de 89. d. 57'.

CONSIDERATION SUR LE CERCLE.

XXIV. Les Geometres considerent souvent le Cercle comme un Polygone d'une infinité de côtez : & selon cela, voicy de quelle sorte on devroit marquer les trois choses que nous venons de determiner dans tout autre Polygone.

Puisque l'arc d'un Polygone regulier est d'autant plus pe[illegible] que le nombre de ses côtez est [illegible] il faut que [illegible] Polygone d'une infinité de côtez soit infiniment petit, & qu'ainsi il ne puisse être marqué que par un zero.

Or

Or si l'on ôte zero de 180 degrez, il restera 180 pour l'angle de ce Polygone infini.

Et si l'on prend la moitié de 180 degrez, il viendra 90 degrez, (qui est la mesure d'un angle droit,) pour l'angle du rayon sur le côté de ce Polygone infini.

Aussi il est vray que l'angle du rayon sur la circonference d'un Cercle est droit en sa maniere, puisque le rayon coupe perpendiculairement sa circonference; & que si cét angle est plus petit qu'un angle droit rectiligne, ce n'est que de l'espace qui est entre la circonference & la tangente, qui est plus petit que tout angle aigu; quoy qu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puisse être divisé en une infinité de plus petits.

Et on peut dire aussi que tout point de la circonference est comme le sommet d'un angle de 180 degrez; puis qu'étant partagé par le rayon en deux angles égaux, chacun de ses angles de part & d'autre est droit en sa maniere, & qu'ainsi chacun est de 90 degrez.

DES FIGURES REGULIERES COMPAREES ENSEMBLE.

V. Theoréme.

Les figures regulieres de même espece, c'est à dire dautant de côtez, sont toûjours semblables; & les circuits sont en même raison que les côtez. XXV.

Car, par ce qui vient d'être dit, les angles de deux figures regu[illegible] sont necessairement égaux; leur grandeur étant [illegible]minée par les arcs des figures, & ces arcs l'étant par le nombre des côtez de la figure.

Et pour ce qui est des côtez, ceux de chaque figure étant égaux, on peut apeller les uns *b*, & les autres *c*.

Or il est bien clair que *b*. *c*. :: *b*. *c*.

Et il est clair aussi que *b* est à *c*, comme 10 *b* à 10 *c*, ou 100 *b* à 100 *c*, ou 1000 *b* à 1000 *c*. (II. 15.)

Donc les circuits ne sçauroient manquer d'être en même raison que les côtez.

VI. Theoréme.

XXVI. Deux figures regulieres étant de même espece, ces 4 choses de l'une, *rayon*, *rayon droit*, *côté*, *circuit*, sont en même raison avec ces 4 autres mêmes choses de l'autre : c'est à dire que le rayon de l'une est au rayon de l'autre, comme le rayon droit au rayon droit, le côté au côté, le circuit au circuit.

Ces deux derniers viennent d'être prouvez ; mais ils ne laisseront pas d'entrer dans la preuve generale des autres.

Il ne faut pour cela que considerer dans chacune de ces figures un angle compris entre un rayon & un rayon droit, qui a pour base la moitié du côté.

Ces deux angles sont semblables en toutes les figures regulieres de même espece ; c'est à dire que l'angle est égal à l'angle, & que les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre.

Car chacun de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc de la figure, puisque sa base est la moitié du côté. Or dans toutes les figures de même espece [illegible] d'autant de degrez [illegible] une qu'en l'autre.

Pour les angles sur chacune des bases, cela est encore plus clair, puisque l'un est droit en l'un &



en l'autre, sçavoir celui qui est fait par le rayon droit; & que l'autre est la moitié de l'angle de la figure, qui est égal en toutes les figures de même espece.

Or puisque ces angles sont semblables, les côtez sont proportionels aux côtez, & la base à la base. (X. 18.) C'est à dire que

Le rayon est au rayon, comme le rayon droit au rayon droit, & la moitié du côté à la moitié du côté, & par consequent comme le côté au côté, & le circuit au circuit.

I. Corollaire.

Les côtez & les circuits de deux figures regulieres de même espece sont en même raison, que les diametres des Cercles dans lesquels elles sont inscrites. XXVII.

Car ces diametres sont le double des rayons de ces figures. Donc &c.

II. Corollaire.

Les circonferences des Cercles sont en même raison que leurs diametres. XXVIII.

Car les Cercles sont comme des Polygones d'une infinité de côtez; & leur circonference est comme le circuit comprenant cette infinité de côtez. Donc, par le precedent Corollaire, ce circuit d'une infinité de côtez d'une part, est au circuit d'une infinité de côtez de l'autre, comme le diametre au diametre.

C'est la seule voye dont on peut prouver la proportion des circonferences & des diametres. Car n'y en ayant point pour le [illegible]ment & immediatement, c[illegible] reduit a y em[illegible] l'analogie des Polygones semblables d'un si grand nombre de côtez que l'on voudra, qu'on peut concevoir être inscrits dans l'un & l'autre Cercle:

Q 7 comme

comme de cent mille côtez, de cent millions, de cent mille millions, & ainsi jusqu'à l'infini.

Car plus ces Polygones ont de côtez, moins il y a de difference entre la circonference du Cercle & leur circuit, VII. 23. Et ainsi quelque petite que soit une ligne donnée, quand ce ne seroit que la cent milliême partie de l'épaisseur d'une feüille de papier; on peut concevoir un Polygone de tant de côtez inscrit dans l'un & dans l'autre Cercle, que la difference de son circuit d'avec la circonference de ces Cercles sera moindre que cette ligne donnée.

Or de quelque grand nombre de côtez que soient ces Polygones, leurs circuits seront toûjours en même raison que les diametres, par le Corollaire precedent.

Donc on doit conclure par une analogie trés-certaine, que les circonferences sont aussi en même raison que les diametres.

III. Corollaire.

XXIX. Si deux figures regulieres de même espece ont de l'égalité en l'une de ces quatre choses, rayon, rayon droit, côté, circuit: elles l'ont en tout, & sont tout-égales.

C'est une suite évidente du sixiéme Theoréme, 26. *Sup.*

IV. Corollaire.

XXX. L'une de ces quatre choses étant donnée, la grandeur de la figure reguliere est determinée: c'est à dire qu'elle ne peut être que d'une sorte, quoy qu'[illegible] toûjours facile de la décrire; [illegible] que souvent il [illegible] aisé ou de trouver le côté d'une figure reguliere en ayant le rayon, ce qui est la même chose que de l'inscrire en un Cercle donné: ou d'en trouver le rayon en ayant le

le côté ; ce qui est la même chose que de trouver le Cercle dans lequel une figure dont le côté est donné puisse être inscrite. C'est dequoy nous allons traiter.

DE L'INSCRIPTION OU CIRCONSCRIPTION d'une figure reguliere, de telle espece qu'on voudra, dans un Cercle donné.

Il est bien facile par ce qui a été dit, une figu- XXXI.
re reguliere étant décrite, d'en trouver le rayon pour l'inscrire dans un Cercle : mais il n'est pas aussi facile d'inscrire dans un Cercle donné, telle figure reguliere que l'on voudra. Et souvent mêmes on ne le peut que mechaniquement, & non Geometriquement, au moins par la Geometrie ordinaire ; parce qu'elle ne donne pas le moyen de diviser un arc donné, en 3, en 5, en 7 &c. ce qui seroit souvent necessaire pour inscrire en un Cercle donné telle figure que l'on voudroit.

Ainsi je pense que tout ce que l'on peut faire de mieux se reduit à ces deux regles generales, & à quelques Problemes particuliers :

PREMIERE REGLE GENERALE.

Lorsqu'on sçait inscrire en un Cercle don- XXXII.
né une certaine espece de figure reguliere : il est bien facile d'inscri[illegible] celles qui o[illegible] moins de côtez, selon la progression double.

C'est à dire qui en ont deux fois moins, 4 fois moins, 8 fois moins &c. jusques à ce qu'on soit ar-

arrivé ou à 4, ou à un nombre impair, qui ne se puisse plus diviser par la moitié.

Ou qui en ont deux fois plus, 4 fois plus, 8 fois plus &c. jusqu'à l'infini.

Supposons, par exemple, qu'on sçache inscrire dans un Cercle donné une figure de 32 côtez. La corde qui soûtiendra deux arcs de cette figure, sera le côté d'une figure de 16. Et celle qui soûtiendra deux arcs de la figure de 16 côtez, sera le côté d'une figure de 8. Et ainsi de suite.

Et au contraire la corde qui soûtiendra la moitié de l'arc de cette figure de 32 côtez, sera le côté d'une figure de 64. Et celle qui soûtiendra la moitié de l'arc d'une figure de 64 côtez, sera le côté d'une figure de 128 côtez. Et ainsi à l'infini.

SECONDE REGLE GENERALE.

XXXIII. LORSQUE l'on sçait inscrire une certaine espece de figure reguliere en un Cercle donné, on la sçait aussi circonscrire.

Car ayant les points de tous les sommets des angles de l'inscrite, les tangentes au Cercle à ces mêmes points étant prolongées jusques à ce qu'elles se rencontrent, font une figure semblable circonscrite au même Cercle; puisque d'une part tous les angles circonscrits de cette figure sont égaux, étant appuyez sur des arcs convexes égaux; & que de l'autre chacun de ces angles est égal à l'angle de la figure inscrite. IX. 53 & 54.


PRO-

PROBLEMES PARTICULIERS.

I. Probleme.

Inscrire un Quadrilatere regulier (qui XXXIV.
s'apelle *Quarré*) dans un Cercle donné.

Deux diametres qui ſe coupent perpendiculairement, partagent la circonference en 4 parties, dont chacune eſt l'arc du Quarré inſcrit dans le Cercle.

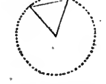
Corollaire.

Incrire dans un Cercle donné une figure XXXV.
de 8 côtez, de 16, de 32; & ainſi à l'infini.
1.re Regle generale.

II. Probleme.

Inscrire en un Cercle donné un Hexagone XXXVI.
ne regulier.

Le demi diametre ou rayon eſt le côté de l'Hexagone. Car ayant fait un angle compris par deux rayons, & ayant pour baſe une ligne égale au rayon: cét angle eſt de 60 degrez, puiſqu'il eſt égal à chacun des angles ſur la baſe, & que les trois enſemble valent 180 degrez. (VIII. 62.) Donc chacun eſt de 60 degrez. Or 60 degrez eſt l'arc de l'Hexagone. Donc le demy diametre eſt le côté de l'Hexagone.



I. Co-

I. Corollaire.

XXXVII. Inscrire en un Cercle donné un Triangle regulier.

Doubler l'arc de l'Hexagone, par la 1.re Regle generale.

II. Corollaire.

XXXVIII. Inscrire en un Cercle donné une figure de 12 côtez, de 24, de 48; & ainsi à l'infini. 1.re Regle generale.

III. Probleme.

XXXIX. Inscrire en un Cercle donné un Decagone, ou figure de dix côtez.

Ayant divisé le demy diametre en moyenne & extreme raison, (par XI. 62.) la plus grande partie de cette ligne ainsi divisée est le côté du Decagone. Car elle soûtient un arc de 36 degrez, par XI. 68.

I. Corollaire.

XL. Inscrire en un Cercle donné un Pentagone ou figure de cinq côtez.

Doubler l'arc du Decagone, par la 1.re Regle generale.

II. Corollaire.

XLI. Inscrire en un Cercle donné une figure de 20 côtez, de 40, de 80; & ainsi à l'infini. 1.re Regle generale.

IV. Probleme.

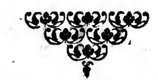
XLII. Inscrire en un Cercle donné une figure de 15 côtez.

De

De l'arc de l'Hexagone, qui est de 60 degrez, ôter l'arc du Decagone, qui est de 36: il restera un arc de 24 degrez, qui est l'arc d'une figure de 15 côtez; parce que 24 fois 15 font 360.

Corollaire.

Inscrire en un Cercle donné une figure de 30 côtez, de 60, de 120; & ainsi à l'infini. XLIII.
1.re Regle generale.





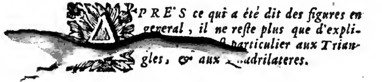
NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TRE'ZIE'ME.

DES TRIANGLES ET QUADRILATE'RES CONSIDEREZ SELON LEURS CÔTEZ ET LEURS ANGLES.



PRE'S ce qui a été dit des figures en general, il ne reste plus que d'expli- [illegible] *particulier aux Triangles, & aux* [illegible]*adrilateres.*

PRE-

PREMIERE SECTION.

Des Triangles.

I. Lemme.

Un Angle avec sa base, est la même chose I.
qu'un Triangle. Et ainsi tout ce qui a été dit dans les Livres des Angles, des Proportionelles, des Reciproques, & des Angles considerez avec leur base, se peut sans peine appliquer aux Triangles.

II. Lemme.

Tout Triangle se peut inscrire en un Cercle. II.
Car il ne faut que trouver la circonference qui passe par les trois sommets des trois angles, par VII. 4.

III. Lemme.

Definition.

Le côté quelconque d'un Triangle en peut être III.
apellé *la base*; & les deux autres, *ses côtez*: & alors l'angle soûtenu par la base est apellé *l'angle du sommet*; & la distance de ce sommet à la base est apellée *la hauteur du Triangle*.

TRIANGLES CONSIDEREZ 'A PART.

I. T[illegible]EME.

Tout Triangle a ses trois angles égaux à deux droits. VIII. 62.

I. Co.

I. Corollaire.

V. Tous les trois angles d'un Triangle peuvent être aigus ; mais il n'y en peut avoir qu'un droit ou obtus.

II. Corollaire.

VI. Si l'un des angles d'un Triangle est droit, les deux autres valent un droit.

III. Corollaire.

VII. Qui connoît la grandeur de deux angles d'un Triangle, connoît la grandeur du 3.^e Car ôtant de la demy-circonference les deux dont on connoît la grandeur, ce qui reste est la grandeur du 3e.

Qui connoît de combien de degrez sont les deux, sçait de combien de degrez est le 3.e Car ôtant de 180 le nombre des degrez que valent les deux, ce qui reste est le nombre des degrez que vaut le 3.e Si les deux valent 108 degrez, le 3e. en vaut 72.

II. Théoréme.

VIII. En tout Triangle le plus grand côté soûtient le plus grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand côté. Car par le 2e. Lemme, tout Triangle peut être inscrit dans un Cercle, & alors la circonference du Cercle est partagée en trois arcs, sur chacun desquels est apuyé chacun des angles du Triangle.

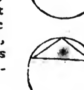
Or ces trois arcs sont :



1.er Cas. Ou tous-trois moindres [illegible] demy-cir[illegible]ce ; & alors [illegible]cun des angles du Triangle est aigu. (IX. 26.) Et il est clair que le plus grand angle

gle étant apuyé sur le plus grand arc, est aussi soûtenu par le plus grand côté. VII. 11.

2.e Cas. Ou l'un de ces arcs est une demy-circonference, & les autres moindres; & alors l'angle apuyé sur la demy-circonference est droit, (IX. 26.) & par consequent le plus grand de tous; comme aussi le côté qui le soûtient, qui est un diametre, est plus grand qu'aucun des deux autres. VII. 10.



3.e Cas. Ou l'un de ces arcs est plus grand que la demy-circonference; & alors l'angle appuyé sur cét arc est obtus, (IX. 26.) & par consequent le plus grand de tous: comme aussi le côté qui le soûtient terminant le segment dans lequel est cét angle obtus, est plus prés du centre qu'aucun des deux côtez qui le comprennent, & ainsi plus grand. VII. 10.

I. Corollaire.

Tous les côtez d'un Triangle étant égaux, tous les angles le sont aussi: & au contraire tous les angles étant égaux, les côtez le sont aussi. IX.

Car étant inscrit dans un Cercle, les côtez égaux soûtiennent des arcs egaux. (V. 26.) Or les angles apuyez sur des arcs égaux, sont égaux. IX. 20.

Que si au contraire on suposoit les trois angles égaux; on prouveroit d[illegible]iere qu[illegible] les côtez sont égau[illegible] car les angles [illegible] sont apuyez sur des arcs égaux. IX. 20. Or les arcs égaux sont soûtenus par des côtez égaux. V. 26.

II. Co-

II. Corollaire.

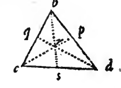
x. En tout Triangle qui a deux côtez égaux, les deux angles soûtenus par ces côtez égaux sont aussi égaux; & au contraire. En inscrivant ce Triangle dans le Cercle, on prouvera ce Corollaire de la même sorte que le precedent.

On laisse à trouver beaucoup d'autres manieres dont on le peut demontrer.

III. Theoréme.

xi. Les lignes qui divisent par la moitié chacun des angles d'un Triangle, se rencontrent en un même point au dedans du Triangle.

Soit le Triangle *bcd*.



Soit l'angle *d* divisé par la moitié par *dq*, & *c* divisé par la moitié par *cp*, & que *dq* & *cp* se coupent en *r*; je dis que la ligne *br* divisera aussi l'angle *b* par la moitié.

Car (par X. 32.) l'angle *d* étant divisé par la moitié,

db. bq. :: dc. cq.

Et par la même raison considerant *dq* comme la base de l'angle *c* divisé par la moitié par *cr*:

cd. cq :: dr. qr.

Donc *db. bq :: dr. qr.* (II. 26.)

Donc (par X. 33.) la ligne *br* divise l'angle *b* par la moitié. Ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

...ignes coupant pa... moitié les angles d'un Triangle font plusieurs proportions. On les peut reduire à 9, en commençant la comparaison par les portions des secantes.

Pour

Pour l'angle *b*.

br. rs. :: { *bd. ds.* / *bc. cs.*

Donc *bd. ds.* :: *bc. cs.*

Pour l'angle *c*.

cr. rp. :: { *cd. dp.* / *cb. bp.*

Donc *cd. dp.* :: *cb. bp.*

Pour l'angle *d*.

dr. rq. :: { *db. bq.* / *dc. cq.*

Donc *db. bq.* :: *dc. cq.*

I. PROBLEME. XII.

FAIRE un Triangle de trois lignes données. Il faut que deux quelconques prises ensemble soient plus grandes que la 3.e

De chacune des deux extremitez de l'une des données décrire un Cercle de l'intervalle de chacune des deux autres ; où ces deux Cercles se rencontreront, ce sera le point où il faudra tirer les deux côtez du Triangle.

II. PROBLEME. XIII.

FAIRE le Triangle dont on a un angle, & la grandeur des côtez qui le comprennent.

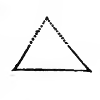
Ayant mis ces deux côtez en sorte qu'ils fassent l'[illegible] donné: la ligne qui en joindra les extremitez achevera le Triangle.



R III. PRO-

III. PROBLEME.

XIV. FAIRE le Triangle dont on a un côté, & les deux angles sur ce côté.



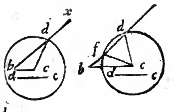
Tirant des lignes sur les extremitez du coté donné qui fassent les angles donnez : où elles se rencontreront elles acheveront le Triangle.

IV. PROBLEME.

XV. FAIRE le Triangle dont on a un angle, un des côtez qui le comprennent, & la grandeur du côté qui le soûtient.

Soit *b c* le côté donné comprenant l'angle donné, & *c d* la grandeur du coté qui doit soûtenir l'angle donné. Tirant de *b* une ligne indefinie qui fasse sur *b c* l'angle donné, & décrivant un Cercle de *c*, intervalle *c d* :

1.er CAS. Ou ce Cercle ne coupera l'indefinie qu'au point *d* ; ce qui arrivera toûjours quand le côté qui doit soûtenir l'angle donné est plus grand que celui qui le comprend: & alors le Triangle sera *b c d*.



2.e CAS. Ou le Cercle coupera l'indefinie en deux [illegible] part, comme en *f* & en [illegible], & alors le Triangle pourra être *b c d*, ou *b c f*.

Et pour sçavoir lequel des deux c'est precisément : il faudroit avoir determiné si *b c* doit soûtenir

tenir un angle aigu, ou s'il doit soûtenir un angle obtus.

Car si *b c* doit soûtenir un angle aigu, le Triangle est *b c d*; & s'il doit soûtenir un angle obtus, le Triangle est *b c f*.

TRIANGLES COMPAREZ.

I. Theoréme.

Deux Triangles sont tout-égaux, quand les côtez de l'un sont égaux aux côtez de l'autre, chacun à chacun. Car alors les angles de l'un sont aussi égaux aux angles de l'autre, par VIII. 66. XVI.

II. Theoréme.

Deux Triangles sont tout-égaux quand ils ont un angle égal, & que les côtez qui comprennent dans l'un cét angle égal, sont égaux à ceux qui le comprennent dans l'autre, chacun à chacun. Car alors la base est aussi égale à la base, par VIII. 67. XVII.

III. Theoréme.

Deux Triangles sont tout-égaux quand ils ont un côté égal, & que les angles sur ce côté égal sont égaux chacun à chacun. XVIII.

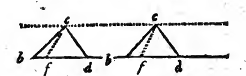
Car ces deux angles étant égaux chacun à chacun, le troisiéme qui est celuy que soûtient le côté égal, sera égal aussi. (VIII. 64.)

Si donc l'on s'imagine que ces deux Triangles sont inscrits chacun [illegible] un Cercle, c[illegible] seront égaux, (par X. 27.) parce que le côté égal soûtiendra dans ces deux Cercles des arcs d'autant de degrez.

Donc les deux autres angles étant égaux chacun à chacun, ſeront appuyez ſur des arcs égaux ; qui étant de Cercles égaux, ſeront ſoûtenus par des côtez égaux chacun à chacun. V. 26.

Donc les trois côtez de ces deux Triangles ſont égaux chacun à chacun, auſſi bien que les angles. Donc ils ſont tout-égaux.

IV. Theoréme.



XIX. Si deux Triangles ont ces trois choſes égales,

Un angle, comme celui dont le ſommet eſt en *b*.

Un des côtez qui comprennent cét angle, comme *b c*.

Et le côté qui le ſoûtient, comme *c d*, ou *c f*:

Il faut outre cela afin qu'ils ſoient tout-égaux, ou que l'angle que ſoûtient *b c*, ne ſoit obtus ny dans l'un ny dans l'autre, ou qu'il ſoit obtus dans tous-les deux.

Car ſuppoſant qu'on eût mené par *c* une paralle-le à *b d*:

Ces deux Triangles ſeroient enfermez entre deux eſpaces paralleles égaux (par VIII. 58.) parce que *b c* eſt égale & fait le même angle *c b d* dans l'un & dans l'autre.

Donc le côté *c d*, ou *c f*, étant égal par l'hy-[illegible] Triangles : s'il eſt oblique [illegible] tous-les deux vers le même endroit, il fait le même angle aigu dans l'un & dans l'autre, lorſque c'eſt vers le dedans du Triangle qu'il eſt incliné, comme quand c'eſt *c d*, en l'un & en l'autre ; ou

ou le même angle obtus, quand c'est vers le dehors, comme si c'est *c f* en l'un & en l'autre. VIII. 55.

Donc les deux Triangles qui avoient déja deux côtez égaux par l'hypothese, se trouvant encore avoir deux angles égaux, & par consequent trois, (VIII. 64.) seront tout-égaux par le 2.e Theoréme.

Mais si le côté qui soûtient l'Angle *b* étoit diversement incliné dans ces deux Triangles, comme si c'étoit *c d* dans l'un & *c f* dans l'autre: ces Triangles n'auroient garde d'être tout-égaux; puisque *c d* feroit dans l'un un angle aigu, & *c f* dans l'autre un angle obtus.

Corollaire.

Dans l'hypothese du precedent Theoréme, lorsque des deux côtez supposez égaux dans les deux Triangles, celui qui soûtient l'angle supposé égal est plus grand que celuy qui le comprend, les deux Triangles sont certainement tout-égaux.

Car alors dans l'un & dans l'autre, l'angle *c d b* est necessairement aigu, par 8. S.

V. Theoréme.

Deux Triangles équiangles entr'eux sont semblables. C'est à dire que les côtez de l'un sont proportionels aux côtez de l'autre. C'est ce qui a été prouvé en diverses manieres dans les deux Livres des Proportionelles. Voyez X. 18. xx.

Avertissement et Defi[...]

En comparant deux Triangles semblables, il faut toûjours comparer le plus grand côté de l'un au plus grand côté de l'autre, le moyen au

 moyen

moyen, & le plus petit au plus petit. Ainsi en deux Triangles semblables le plus grand côté étant appellé *b*. b.

Le moyen *d*. d.

Et le plus petit *h*. h.

b. b. : : *d*. d. : : *b*. h.

Et ces côtez que l'on doit comparer ensemble s'appellent *homologues*.

I. Corollaire.

XXII. Les côtez qui soûtiennent les angles égaux, sont homologues. Car dans l'un & dans l'autre le plus grand côté soûtient le plus grand angle; le moyen côté le moyen angle; le plus petit côté le plus petit angle. Cela se prouve encore par X. 18.

II. Corollaire.

XXIII. Deux Triangles sont équiangles, si deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun. Car il s'ensuit de-là que le 3.e est aussi égal au 3.e.

VI. Theoréme.

XXIV. Lorsque deux Triangles ont un angle égal, & les côtez qui comprennent ces angles, proportionels, ils sont semblables. Car alors la base est aussi proportionelle à la base, & les deux angles sur cette base égaux, par XI. 57.

VII. Theoréme.

XX[illegible] Si d[illegible] de même hauteur, les [illegible]ces à la base également distantes de la base dans l'un & dans l'autre sont entr'elles comme ces bases.

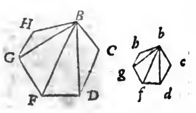
Cela est demontré X. 20.

VIII. Theo-

VIII. THEORÉME.

XXVI.

DEUX Polygones quelconques étant ſemblables, peuvent être partagez chacun en autant de Triangles l'un que l'autre ; qui ſeront tels ; que ceux d'une part ſont ſemblables à ceux de l'autre part, chacun à chacun ; & les côtez homologues de deux de ces Triangles ſemblables, ſont en même raiſon que ceux de deux autres ſemblables.



Soient deux Hexagones irreguliers ſemblables *B C D F G H*, & *b c d f g h*. Soient menées dans le grand des lignes de *B* à *D*, à *F*, à *G*. Et de même dans le petit.

L'un & l'autre Hexagone ſera partagé en 4 Triangles,

Sçavoir { *B C D. B D F. B F G. B G H.* / *b c d. b d f. b f g. b g h.*

Qui ſont ſemblables deux à deux, *B C D* à *b c d* &c.

Car les angles *C* & *c* ſont égaux, par l'hypotheſe que les Hexagones ſont ſemblables ; & les côtez *C B* & *C D* ſont proportionels aux côtez *c b* & *c d*, par la même hypotheſe.

Donc les baſes *B D* & *b d* ſont auſſi proportionelles aux côtez ; & les Triangles ſont ſemblables, par le 6.ᵉ Theoréme.

B D F & *b d f* ſont ſemblables auſſi. Car les angles *C D F* & *c d f* étant égaux par l'hypotheſe, ſi on en ôte les angles *B D C* & *b d c* qui ſont égaux auſſi, (comme on le vient de voir :) les angles *B D F* & *b d f* demeureront égaux.

 Or

Or les côtez de ces angles *BD* & *DF* d'une part, & *bd* & *df* de l'autre, sont proportionels. Donc les bases *BF* & *bf* sont proportionelles aux côtez, & les Triangles *BDF* & *bdf* semblables. On prouvera la même chose, & de la même maniere, des autres Triangles. Donc les Triangles d'une part sont semblables à ceux de l'autre.

Il reste à prouver que les côtez homologues de deux de ces Triangles semblables sont en même raison que ceux de deux autres semblables; ce qui est aisé. Car prenant dans les deux Hexagones les points *B* & *b* pour sommet commun des quatre Triangles : ils auront chacun pour base un des côtez de l'Hexagone : les deux premiers *CD* & *cd*, les deux seconds *DF* & *df* &c.

Or par l'hypothese *CD.cd.* : : *DF.df.*

Donc les bases des deux premiers Triangles sont proportionelles aux bases des deux seconds. Et ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

XXVII. *On omet diverses choses qui pourroient être dites des Triangles semblables; parce qu'il n'y a rien en tout cela qui ne se trouve facilement par ce qui a été dit des Angles considerez avec leurs bases dans les deux Livres des Proportionelles.*

DIVISION DU TRIANGLE EN SES ESPECES.

XXVIII. Le Triangle se divise selon ses côtez & selon ses angles. Si donc [illegible]

[illegible]es côtez sont	Tous-trois [illegible] il s'appelle	Scaléne.
	Deux égaux,	Isoscéle.
	Tous-trois égaux,	Equilateral.

Les

Les angles sont { Tous-trois aigus, — Oxygone
Deux aigus & l'autre { obtus, Amblygone.
droit, Rectangle.

Le Scaléne à ses trois angles inégaux.
L'Isoscéle en a deux égaux.
L'Equilateral les a tous-trois égaux.

Le Scaléne
L'Isoscéle } peuvent être { Oxygone.
Amblygone.
Rectangle.

L'Equilateral ne sçauroit être qu'Oxygone.

DES TRIANGLES OXYGONES.

THEORÉME.

SI de tous les angles d'un Triangle Oxygone on tire des perpendiculaires aux côtez, elles se couperont en un même point au dedans du Triangle. XXIX.

Soit le Triangle *bcd*, & deux perpendiculaires aux côtez *dm*, *cn*; je dis que *bp* menée par le point *o*, qui est celuy où *dm* & *cn* se coupent, sera aussi perpendiculaire à *cd*.

Car les Triangles *cbn* & *dbm* sont équiangles, ayant chacun un angle droit & un angle commun; & par conséquent les angles *bcn* & *bdm* sont égaux.

Et par consequent aussi les Triangles *bdm* & *com* sont équiangles, ayant chacun un angle droit, & l'angle *mco* (qui [illegible] étant égal à l'angle *bdm*.

Donc *dm*. *mc*. :: *mb*. *mo*; & *alternando*, *dm*. *mb*. : *mc*. *mo*.

Donc les Triangles *b m o* & *d m c* sont semblables, par 24. *sup.* puisque dans le Triangle *d m c* les côtez *d m* & *m c*, qui comprennent un angle droit, sont proportionels à *m b* & *m o* qui comprennent aussi un angle droit.

Donc l'angle *m b o* soûtenu par *m o*, est égal à l'angle *m d c* soûtenu par *m c*.

Or les angles *m o b* & *p o d* sont égaux, parce qu'ils sont opposez au sommet. Donc les Triangles *m o b* & *p o d* sont équiangles.

Or l'angle *o m b* est droit, par la construction.

Donc l'angle *o p d* est droit aussi. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

XXX. CES perpendiculaires coupant les angles d'un Triangle, font 12 Triangles rectangles: 6 grands, qui ont pour hypotenuse l'un des côtez du Triangle total, & qui enferment tous quelque chose les uns des autres : & 6 petits entierement separez, & qui ont chacun pour hypotenuse la portion d'une perpendiculaire la plus proche de l'angle qu'elle coupe ; & ces 12 Triangles rectangles sont équiangles 4 à 4, deux grands & deux petits. C'est un exercice d'Esprit de les trouver, & il vaut mieux le laisser à ceux qui commencent. Je diray seulement qu'entre les diverses proportions qui se font par tous ces Triangles, il y en a de deux sortes fort considerables.

La premiere est, que l'un des côtez d'un angle & sa premiere portion sont reciproques à l'autre côté & sa premiere portion ; c'est à dire que le grand côté est au petit, comme la premiere [illegible] portion du grand. [illegible]exemple dans l'angle *b*:

grand. petit. :: 1.re port. du petit. 1.re port. du grand.
bd. *bc.* :: *bm.* *bn.*

La

La seconde est, que les portions d'un côte du Triangle total sont reciproques à la perpendiculaire entiere, & sa portion qui fait l'angle droit; c'est à dire qu'une portion du côté est à la perpendiculaire, comme la portion de la perpendiculaire qui fait l'angle droit, est à l'autre portion du côté. Exemple:

port. du côté. perp. :: port. de la perp. port. du côté.
m c. *m d.* :: *m o* *m b.*

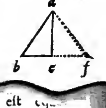
DES TRIANGLES RECTANGLES.

Theoréme.

Si l'un des angles aigus d'un Triangle rectangle est double de l'autre, (ce qui ne peut être qu'il ne vaille les deux-tiers d'un angle droit, & l'autre le tiers, c'est à dire qu'il ne soit de 60 degrez, & l'autre de 30:) le petit côté qui soûtient l'angle de 30 degrez & qui en est le sinus, est la moitié de l'hypotenuse de l'angle droit, qui est aussi le rayon de cét angle de 30 degrez. xxxi.

Soit le Triangle *b d c* conforme à l'hypothese.

Tirant *d f* égale à *d b* sur *b c* prolongée, l'angle *d f b* sera égal à l'angle *d b f*, (10. *sup.*) & par consequent l'un & l'autre sera de 60 degrez. Donc l'angle *b d f* sera aussi de 60 degrez, puisque tous les trois ensemble valent deux droits, c'est à dire 180 degrez. (4. *sup.*)



Donc le Triangle *b d f* est eq[illegible] (9. *sup.*)

Donc *b c* + *c f* = *d b*.

Or $bc = ef$, les deux Triangles dbc & dcf étant tout-égaux, par 18. *sup.*

Donc bc est la moitié de db. Ce qu'il falloit demontrer.

PROBLEME.

XXXII. TROUVER le Triangle rectangle dont on a

1. Ou les deux côtez comprenans l'angle droit.
2. Ou l'hypotenuse, & un des côtez.
3. Ou l'hypotenuse, & la perpendiculaire du sommet de l'angle droit à cette hypotenuse.
4. Ou l'hypotenuse, & la moyenne proportionelle entre l'hypotenuse donnée & un des cotez.
5. Ou l'un des côtez, & la moyenne proportionelle entre le côté donné & l'hypotenuse.
6. Ou l'un des côtez, & la moyenne proportionelle entre ce côté donné & l'autre côté.

PREMIER CAS.

Mettant en angle droit les deux côtez donnez: la ligne qui en joint les extremitez est l'hypotenuse.

SECOND CAS.

Décrivant la demy-circonference dont l'hypotenuse donnée est le diametre : le point de cette demy-circonference où se terminera le côté donné, sera le point du sommet de l'angle droit ; ce qui determinera l'autre côté non donné. (IX. 26.)

TROISIÉME CAS.

Voyez IX. 35.

QUA-

Quatriéme, Cinquiéme et Sixiéme Cas.

Trois lignes étant continuëment proportionelles, ayant la premiere & la seconde, qui est la moyenne, on a la 3.e par X. 36. Et par consequent le 4.e & le 5.e Cas se rapportent au 2.e & le 6.e au 1.er

DES TRIANGLES ISOSCELES.

I. Theoréme

Lorsque l'angle du sommet d'un Triangle Isoscele est de 36 degrez, chacun des angles sur la base est de 72; & la base est moyenne proportionelle entre le côté entier, & le côté moins cette base, (c'est à dire que la base divise le côté en moyenne & extreme raison,) & la base étant ajoûtée au côté, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extreme raison. Voyez XI. 68. 69. 65. XXXIII.

II. Theoréme.

Deux Triangles Isosceles étant semblables & inégaux, si la même ligne est la base de l'un & le côté de l'autre: cette ligne sera moyenne proportionelle entre le côté du Triangle dont elle est base, & la base de celui dont elle est côté. XXXIV.

b b f A d c d c E c

Soit l'un des Triangles Isosceles $b\ c\ d$, & l'autre $c\ f\ d$, de sorte que $c\ d$ soit la base de $b\ c\ d$, & le

le côté de cfd. Je dis que cd sera moyenne proportionelle entre bc côté du premier Triangle, & fd base du second. Car ces Triangles étant semblables, bc (côté du 1.er) est à cd (côté du 2.e) comme le même cd entant que base du premier, est à fd base du second. (X. 18.)

Donc ∺ $bc.\ cd.\ fd.$ Ce qu'il falloit demontrer.

SECONDE SECTION.

Des Quadrilateres.

DEFINITIONS.

XXXV. Le Quadrilatere est une figure de 4 côtez qui ne se joignent qu'aux extremitez : & par consequent de 4 angles qui tous ensemble valent quatre droits. XII. 9.

Les côtez qui comprennent un même angle s'appellent *côtez angulaires*.

Ceux qui ne comprennent point le même angle, *cotez opposez*.

Les angles de même sont *proches* ou *opposez*.

THEORÉME.

XXXVI. Tout Quadrilatere qui a ses angles opposez égaux à deux droits, peut être inscrit au Cercle, & nul autre n'y peut être inscrit.

Soit le Quadrilatere $bcdf$, dont les angles b & d soient égaux à deux droits, & par consequent aussi les angles f. c.

Soit trouvé le Cercle dont la [illegible]nce passe pa[illegible] 3 points fbc. par VI. 4. Je dis qu'elle passera aussi par le 4.e qui est d.

Car

Car tout angle qui a *fc* pour base, & qui est inscrit dans ce Cercle du côté de *d*, comme *fgc*, plus l'angle *b*, vaut deux droits. IX. 28. Donc l'angle *fgc* est égal à l'angle *d*, qui avec l'angle *b*, vaut aussi deux droits, par l'hypothese. Donc l'angle *d* est aussi inscrit dans ce Cercle par IX. 31.

DIVISION ET DEFINITIONS.

LORSQUE les côtez opposez d'un Quadrilate- XXXVII.
re sont paralleles, le 1.er au 3.e & le 2.e au 4.e on l'appelle *Parallelogramme*; sinon on l'appelle *Trapeze*, quand même deux des côtez opposez, comme le 1.er & le 3.e seroient paralleles, si le 2.e & le 4.e ne le sont pas.

DES PARALLELOGRAMMES.

I. THEORÉME.

SI les côtez opposez d'un Quadrilatere sont XXXVIII.
égaux, ils sont paralleles; & s'ils sont paralleles, ils sont égaux. VI. 26 & 27.

II. THEORÉME.

SI tous les 4 angles d'un Quadrilatere sont XXXIX.
droits, il est Parallelogramme. VI. 13.

III. THEORÉME.

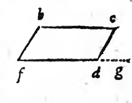
SI deux côtez opposez d'un Quadrilatere sont XL.
égaux & paralleles, les deux autres sont aussi égaux & paralleles. VI. 28.

IV.

IV. Theoréme.

XLI. Les deux angles opposez d'un Parallelogramme sont égaux, & les proches sont égaux à deux droits.

Soit le Parallelogramme *b c d f*. Soit prolongé *f d* jusques à *g*. L'angle *c d g* est égal à l'angle *c*, par VIII. 54. & à l'angle *f*, par VIII. 55. Donc les aigus opposez *c* & *f* sont égaux.



Or les deux angles vers *d*, l'un exterieur & l'autre interieur, sont égaux à deux droits. (VIII. 14.) Donc les angles interieurs vers *d* & vers *f* sont aussi égaux à deux droits.

Donc les deux autres vers *b* & vers *c* sont aussi égaux à deux droits, puisque les quatre valent 4 droits. (XII. 9.)

Otant donc de part & d'autre les deux aigus *c* & *f* qui sont égaux, les obtus opposez *b* & *d* seront égaux.

I. Corollaire.

XLII. S'il y a un angle droit dans un Parallelogramme, tous les autres le sont aussi, & alors il est appellé *Rectangle*.

Car l'opposé est droit, puisqu'il est égal à celuy-là ; & les proches ne peuvent valoir deux droits, que l'un étant droit, l'autre ne le soit aussi.

II. Corollaire.

XLIII. Qui connoist un angle d'un Parallelogramme les connoist tous. Car ce qui manque de la demy-circonference à l'arc qui mesure l'angle donné,

né, est la mesure de l'angle proche de celuy-là, & les deux autres sont égaux chacun à l'un de ces deux-là.

III. Corollaire.

Deux Parallelogrammes qui ont un angle XLIV. égal, sont équiangles.

IV. Corollaire.

Si deux côtez angulaires d'un Parallelogram- XLV. me sont égaux, tous les quatre sont égaux entr'eux. Car chacun des angulaires est égal à son opposé. (38. *sup.*)

V. Corollaire.

Qui connoist d'un Parallelogramme deux cô- XLVI. tez angulaires & un angle, connoît tout le Parallelogramme.

Car qui connoist un angle, les connoist tous; & qui connoist deux côtez angulaires connoist les deux autres, chacun étant égal à son opposé.

Probleme.

Achever un Parallelogramme dont on a XLVII. deux côtez angulaires avec l'angle qu'ils comprennent.

De l'extremité de l'un des côtez, & de l'intervalle de l'autre, décrire un Cercle. De l'extremité de cét autre côté, & de l'intervalle du premier, d'écrire un autre Cercle. Les lignes menées de ces extremitez au [illegible] Cercles se couperont, acheveront la description du [illegible]logramme.

V.

V. Theoréme.

XLVIII. Deux Parallelogrammes sont semblables, quand ils ont un angle égal, & les côtez angulaires proportionnels.

Car l'égalité d'un angle donne celle des autres, (44. S.) & deux côtez angulaires ne sçauroient être proportionels, que les deux autres ne le soient aussi.

DEFINITION.

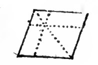
XLIX. La ligne qui joint deux angles opposez s'appelle *Diagonale*, & elle divise le Parallelogramme en deux Triangles tout-égaux. Car les deux angles non divisez sont égaux parce qu'ils sont opposez (41. S.) & les parties des divisez sont alternativement égales, par VIII. 54.



VI. Theoréme.

L. Si on tire des paralleles aux côtez angulaires qui passent par un même point de la diagonale, les parties de ces nouvelles lignes sont proportionelles.

Demontré X. 17.



Definition.

LI. [illegible] qu'un Parallelogramme est décrit autour de la diagonale d'un autre Parallelogramme, quand d'un point de cette diagonale on tire deux paralleles aux deux côtez angulaires du Parallelogramme,

me, qui se terminant chacune à l'un de ces côtez fassent un nouveau Parallelogramme, dont une partie de cette diagonale est encore diagonale.

VII. THEORÉME.

TOUT Parallelogramme décrit autour de la diagonale d'un autre, lui est semblable. III.

b c d f est semblable à *m n o f*. Car d'une part les angles *f d c* & *f o n* sont égaux; parce que *c d* & *n o* sont paralleles. (VIII. 59.)

Et par la même raison les angles *f c d*, & *f n o* sont égaux aussi.

Donc *f d*. *f o* :: *d c*. *o n*. (20. *sup*.)

Donc ces Parallelogrammes sont équiangles, & ont les côtez angulaires proportionels. Donc ils sont semblables, par le 5.ᵉ Theoréme 48. *sup*.

DIVISION DU PARALLELOGRAMME EN SES ESPECES.

LIII.



AU-

AUTREMENT

Parallelogr.	rectangle	Tous les côtez ég.	*Quarré.*
		Les seuls oppos. ég.	Oblong.
	non recta.	Tous les côtez ég.	Rhombe.
		Les seuls oppos. ég.	Rhomboïde.

DU PENTAGONE.

Theoréme.

LIV. Lorsque deux lignes qui soûtiennent chacune un angle d'un Pentagone regulier se coupent, elles se coupent mutuellement en moyenne & extreme raison; & la plus grande partie de chacune de ces lignes est égale au côté du Pentagone.

Soit le Pentagone inscrit dans un Cercle.

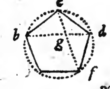
Chaque côté soûtient un arc de 72 degrez. XII. 21.

Donc les angles inscrits au même Cercle qui sont soûtenus par un de ces arcs, (tels que sont *cbd*, *cdb*, *dcf*, *dfc*,) sont chacun de 36 degrez, IX. 17.

Et ceux qui sont soûtenus par deux de ces côtez, (comme l'angle *bcf*,) sont de 72. *Ibid.*

Et les angles opposez au sommet (*bgc* & *fgd*) sont chacun aussi de 72 degrez, par IX. 42. Et par consequent *bg* est égale à *bc* côté du Pentagone, par 10. *sup.*

Donc l'angle *cbg* est tel par 33. *sup.* que la base [illegible] côté, [illegible] une ligne divisée en moyenne & extreme raison. Or *gd* est égale à la base *gc*,



par

par 10 *ſup.* ou par IX. 34. Donc la toute *b d* eſt diviſée en moyenne & extreme raiſon. C'eſt-à-dire que,

b d. b g. :: b g. g d.

Corollaire.

Un Hexagone & un Decagone étant inſcrits dans le même Cercle, le côté de l'un ajoûté au côté de l'autre fait une ligne diviſée en moyenne & extreme raiſon. LV.

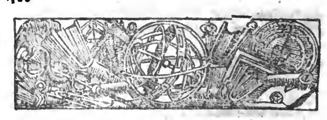
Car l'angle compris entre deux demy-diametres, qui a pour baſe le côté du Decagone, eſt un angle de 36 degrez (XII. 21.) Donc ajoûtant le côté à la baſe, il s'en fait une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon. 33. *ſup.*

Or le côté de cét angle, qui eſt le demy-diametre, eſt auſſi le côté de l'Hexagone inſcrit dans ce Cercle-là. XII. 36.





NOU.



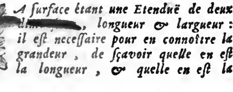
NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATORZIE'ME.

DES FIGURES PLANES considerées selon leur aire : c'est à dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent.

Et premierement des Rectangles.

IDE'E GENERALE DE LA MESURE DES SURFACES.

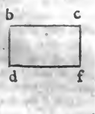


1 L*A surface étant* une Etenduë de deux dim[illegible], longueur & largueur : il est necessaire pour en connoître la grandeur, de sçavoir quelle en est la longueur, & quelle en est la largeur.

La

La longueur ſe meſure par une ligne droite qui donne la diſtance d'un point à un point. C'eſt pourquoy on ne peut connoître la longueur des lignes courbes que par rapport à des lignes droites.

La largeur conſiſte dans la diſtance entre deux lignes, comme entre b c *&* d f, *qui ſe meſure auſſi par une ligne droite. C'eſt pourquoy les ſurfaces courbes ne ſe peuvent meſurer que par rapport à des ſurfaces planes.*



De plus toute ligne droite n'eſt pas propre à meſurer la diſtance d'une ligne à une ligne. Car ſi elle tomboit d'un point d'une ligne obliquement ſur l'autre, elle n'en meſureroit pas la diſtance; mais tombant d'un point d'une ligne perpendiculairement ſur l'autre, elle meſure la diſtance de ce point à cette ligne.

Mais il ne s'enſuit pas que pour avoir meſuré la diſtance d'un des points de la ligne b c *à la ligne* d f, *elle ait meſuré la diſtance de tous les autres points de la ligne* b c, *à moins que tous les autres points de la ligne* b c *ne fuſſent également diſtans de la ligne* d f; *c'eſt à dire qu'elle ne lui fuſt parallele.*

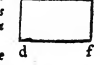
D'où il s'enſuit que ſi b c *n'étoit pas parallele à* d f, *il faudroit autant de differentes meſures pour connoître la diſtance de* b c *à* d f, *qu'il y auroit de differens points dans* b c. *Ce qui étant impoſſible, il paroît par là qu'afin qu'on puiſſe avoir diſtinctement la diſtance d'une ligne à une autre, (ce qui fait la largeur,) il faut que ces lignes ſoient paralleles.*

De plus, ſi ces lignes [illegible] *ſoit plus grande que* d f, *on ne ſçauroit* [illegible] *prendre pour la longueur, parce que cette ſurface ſe-*

seroit plus longue d'un côté que de l'autre. Et ainsi afin qu'on puisse avoir exactement la mesure d'une surface, il faut que les lignes dont la distance en fait la largeur, soient non seulement paralleles, mais aussi égales. D'où il arrivera que les autres lignes seront aussi égales & paralleles entr'elles. (VI. 28.)

Et par consequent afin qu'une surface soit en état d'être exactement mesurée, il faut qu'elle soit terminée par 4 lignes paralleles; c'est à dire que ce soit un Parallelogramme.

Mais si les deux lignes égales & paralleles qu'on prend pour mesure de la longueur ne sont pas directement opposées, en sorte que de tous les points de l'une on ne puisse tirer des perpendiculaires sur l'autre; c'est à dire si ce Parallelogramme n'est pas rectangle, mais obliqu'angle: on aura bien alors dans la figure dequoi en mesurer la longueur, sçavoir lequel on voudra de deux côtez opposez. Mais l'autre côté angulaire étant oblique sur cette longueur, ne sera pas propre à mesurer la distance entre les deux lignes qui font la longueur. D'où il s'ensuit qu'il n'y a que le Rectangle qui ait en soi la mesure de sa longueur & de sa largeur.



Car si d f *est prise pour la longueur,* b d *qui est la mesure de de la distance de tous les points de* b c *à* d f, *en mesurera la largeur.*

C'est pourquoi nulle surface ne se mesure proprement par soimême, que le Rectangle. Et dans tout Rectangle l'un des côtez angulaires à choisir, se peut appeller la longueur, & l'autre sa largeur; *ou pour s'accommoder davantage aux termes communs, l'un* sa base, *& l'autre* sa hauteur.

Mais comme la mesure est d'autant plus parfaite qu'el-

qu'elle est plus simple, & que le Quarré qui n'a qu'une même mesure pour sa longueur & pour sa largeur, est plus simple que l'Oblong qui en a deux: il est arrivé de là que les Hommes prennent le Quarré de quelque ligne connuë, comme d une toise, d'un pied, d'un pouce &c. pour la mesure commune de toutes les surfaces; & qu'alors seulement ils en croient connoître parfaitement la grandeur, quand ils peuvent dire qu'elle est de tant de toises quarrées, ou de tant de pieds quarrez, ou de tant de pouces quarrez &c. Et ainsi ce qu'on entend ordinairement par ces mots, (avoir l'aire d'un Plan,) c'est sçavoir combien ce Plan, de quelque figure qu'il soit, contient ou de toises quarrées, ou de pieds quarrez, ou de pouces quarrez; & quand on parle de sur ace, on sous entend le mot de quarré sans l exprimer: comme quand on dit que la place d un logis est de tant de toises, cela s'entend de toises quarrées, dont chacune vaut 36 pieds quarrez.

Neanmoins comme cela ne se peut pas toûjours connoître à cause des grandeurs incommensurables, on se contente souvent en comparant des surfaces ensemble, de sçavoir que si l'une contient tant de petits Rectangles, comme 16 fois bf, *l autre en contient tant aussi; comme 25 fois le même* bf.

Tout cela nous fait voir, 1.° Que la premiere & la plus parfaite mesure est le Quarré, & que c'est par le Quarré qu'on mesure les Rectangles pour en connoître exactement la grandeur.

2.° Que la plus parfaite apres le Quarré, & qui est mêmes parfaite en son genre, parce qu'elle contient en soi la mesure de la longueur & de la largeur, est le Rectangle oblong; & que c'est par là que l'on mesure les autres Parallelogrammes.

3°. Que celle d'apres, & qui est imparfaite, ne contenant pas en soi la mesure de la longueur & de la largeur, est le Parallelogramme non rectangle: & que c'est

d'ordinaire par ces Parallelogrammes que l'on mesure les Triangles, en ce qu'on les considere comme les moitiez de ces Parallelogrammes.

4°. Que le Triangle suit aprés, & que c'est par lui qu'on mesure d'ordinaire les autres Polygones en les reduisant en Triangles, comme ils s'y peuvent tous reduire.

5°. Qu'enfin les autres Polygones sont mesurez & ne servent point de mesure, comme le Quarré sert de mesure & n'est point mesuré si ce n'est par d'autres Quarrez plus petits; comme quand on dit que la toise quarrée contient 36 pieds quarrez.

Voilà en abregé tout ce qu'a pû faire l'art des Hommes pour mesurer les surfaces rectilignes, sans parler des curvilignes qui ne se peuvent mesurer que par rapport à des rectilignes.

Mais comme toutes nos connoissances qui dependent de l'Art, en supposent de naturelles qu'on appelle Axiomes: voici ceux sur lesquels est fondée toute la science de la dimension des figures planes.

I. Axiome.

Tous les Quarrez de racine égale sont égaux.

11. C'est à dire que les espaces compris dans le Quarré de la ligne b, & dans celui de la ligne m égale à b, & de quelque autre ligne que ce soit égale à b, sont egaux. Cela est clair par la notion même de la surface, qui n'ayant que deux dimensions, longueur & largeur, il n'est pas plus clair que deux lignes droites d'une même longueur sont égales, qu'il est clair que deux surfaces de même longueur & de même largeur sont égales. Or deux Quarrez sont de même longueur & de même largeur, si la ligne qui mesure dans l'un tant la longueur que la largeur, est égale à celle qui mesure dans l'autre tant la longueur que la largeur.

C'est pourquoi aussi partout où une ligne d'une cer-

certaine longueur se trouve, comme de la longueur de *b*, elle peut être marquée par le même caractere & appellée *b*. Car il ne peut y avoir de difference que de situation, ce qui n'y fait rien. Et ainsi il ne faut pas s'étonner si *bb* est partout égal à *bb*.

II. Axiome.

Si les côtez angulaires d'un Rectangle sont égaux aux côtez angulaires d'autres Rectangles, chacun à chacun, tous ces Rectangles sont égaux. Ou ce qui est la même chose, tous ceux dont la base est égale à la base, & la hauteur à la hauteur, sont égaux. III.

C'est la même chose que le precedent. Car les côtez angulaires d'un Rectangle en mesurent la longueur & la largeur; & on peut même, comme nous avons dit, en appeller l'un sa longueur, & l'autre sa largeur indifferemment. Et par consequent tous les Rectangles dont les côtez angulaires sont égaux, chacun à chacun, ont même longueur & même largeur.

On peut encore dire que les côtez angulaires d'un Rectangle pouvant être marquez par les mêmes caracteres partout où ils se rencontrent égaux, comme par *b* & par *c*: tous les Rectangles qui ont leurs côtez angulaires égaux l'un à *b* & l'autre à *c*, sont égaux; c'est à dire que *b c* est égal à *b c*.

Avertissement.

Ces deux Axiomes nous font voir que tout ce que nous avons dit dans le premier Livre de la multiplication des grandeurs incomplexes & complexes, & dans le 3.ᵉ de la raison entre les grandeurs planes, se peut appliquer aux Quarrez & aux Rectangles; & qu'il n'y a qu'à substituer ... au lieu des simples caracteres. IV.

C'est ce que nous verrons en peu de mots en commençant par la puissance des lignes.

DEFINITION.

V. On apelle puissance d'une ligne le Quarré de cette ligne, comme *b b* est la puissance de *b*; ou bien le Rectangle de deux lignes quand il s'agit de deux lignes, comme la puissance de *b* par *c* est le Rectangle *b c*.

DE LA PUISSANCE D'UNE LIGNE comparée avec la puissance de ses parties.

VI. TOUT ce qu'on enseigne de la puissance d'une ligne comparée avec la puissance de ses parties, n'est que la même chose que ce que nous avons dit dans le premier Livre de la multiplication des grandeurs complexes, & se peut reduire à cet Axiome;

III. AXIOME.

VII. C'est la même chose de multiplier le tout par le tout, & de multiplier le tout par chacune de ses parties, ou de multiplier chaque partie par toutes les parties, en faisant autant de multiplications partiales qu'il y a d'unitez dans le produit des deux nombres des parties qu'on multiplie les unes par les autres.

AVERTISSEMENT.

VIII. *Ainsi le plus grand mystere pour ne se point broüiller est de nommer chaque ligne autant que l'on peut par un seul caractere, afin que deux caracteres joints ensemble puissent marquer une multiplication, c'est à dire un Rectangle; & de marquer par un même caractere les lignes égales.*

Exemple : La ligne b *soit divisée en trois portions inégales que j'appelleray* c. d. f. *Il est visible*

ble que c'est la même chose de multiplier b *par* b, *ce qui donne* b b, *que de multiplier* b *par toutes ses parties, c'est à dire par* c, *par* d, *&* *par* f, *ce qui donne* b c. b d. b f: *&* *par consequent* b b = b c + b d + b f.

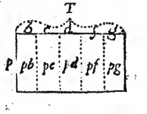
Ainsi presque toutes les Propositions du second Livre d'Euclide ne sont que des Corollaires de cét Axiome & de cét Avertissement. Je ne proposeray que les principales qui sont d'usage.

Je suppose toûjours qu'on mette à angles droits les lignes qui doivent faire les côtez angulaires des Rectangles, sans que je m'amuse plus à en avertir.

Et quand je parle d'une ligne coupée en plusieurs parties, j'entens toûjours égales ou inégales, à moins que je n'exprime qu'on les doit prendre égales.

I. THEORÉME.

AYANT deux lignes, l'une non coupée & l'autre coupée en tant de parties que l'on voudra: le Rectangle des deux entieres est égal à tous les Rectangles de la non-coupée par chaque partie de la coupée. C'est à dire qu'un Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble. IX.



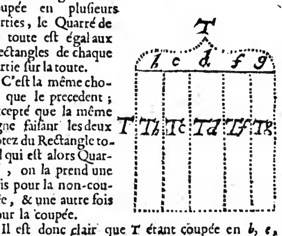
Soit *p* la non-coupée, & *T* la cou[illegible] parties *b*, *c*, *d*, *f*, *g*. Il est bien visible qu'en tir[illegible] des lignes paralleles à *p*, (& par consequent qui [l]ui sont égales,) par tous les points de division de

 T: elles

T : elles feront *pb, pc, pd, pf, pg*, qui pris ensemble sont égaux à *pT*, puisque c'en sont toutes les parties.

II. Theoréme.

X. Une ligne étant coupée en plusieurs parties, le Quarré de la toute est égal aux Rectangles de chaque partie sur la toute.



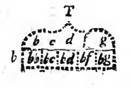
C'est la même chose que le precedent; excepté que la même ligne faisant les deux côtez du Rectangle total qui est alors Quarré, on la prend une fois pour la non-coupée, & une autre fois pour la coupée.

Il est donc clair que *T* étant coupée en *b, c, d, f, g* :

TT doit étre égal à *Tb, Tc, Td, Tf, Tg*.

III. Theoréme.

XI. Une ligne étant coupée en tant de parties que l'on voudra, le Rectangle de quelque partie que ce soit par la toute, est égal au Quarré de cette partie plus les Rec[illegible] de cette partie par chacune des autres.



Soit *T* comme auparavant divisée en 5 parties *b, c, d, f, g*. Il est clair par le premier Theoréme, que

que le Rectangle de *b* par la toute est égal aux 5 Rectangles de *b* par chaque partie de *T*. Or *b* est l'une de ces parties, & par consequent l'un de ces 5 Rectangles sera *b b*, c'est à dire le Quarré de cette partie ; & les autres 4 Rectangles seront les Rectangles de *b* par chacune des autres parties, sçavoir *b c. b d. b f. b g.*

IV. Theoréme.

Une ligne étant divisée en tant de parties que l'on voudra, le Quarré de la toute est égal aux Quarrez de chaque partie, plus deux fois autant de Rectangles, dont il y en a toûjours deux qui sont les Rectangles des mêmes deux parties. XII.

	b	*c*	*d*	*f*	*g*
b	*bb*	*bc*	*bd*	*bf*	*bg*
c	*cb*	*cc*	*cd*	*cf*	*cg*
d	*db*	*dc*	*dd*	*df*	*dg*
f	*fb*	*fc*	*fd*	*ff*	*fg*
g	*gb*	*gc*	*gd*	*gf*	*gg*

Ce Theoréme n'est que l'assemblage du 2.e & du 3.e

Soit *T* comme auparavant divisée en *b, c, d, f, g.* Par le 2.e Theoréme ayant fait le Quarré *T T*, & n'ayant divisé qu'un seul de ses côtez par *b, c, d, f, g,* & tiré les paralleles à l'autre côté, on a 5 bandes, dont on peut appeller chacune du nom de sa partie, sçavoir *T b, T c, T d, T f, T g.* Mais divisant encore l'autre côté par les mêmes *b, c, d, f, g,* on divise chacune des 5 bandes en 5 cellules,

lules, ce qui en fait 25; & dans chaque bande ainsi divisée se trouve un Quarré de la partie dont elle est bande, (dans *Tb*, *bb*; dans *Tc*, *cc*;) & quatre Rectangles des autres parties par celle-là. Et il est aisé de voir que dans chaque bande se trouve toûjours un Rectangle de deux parties, qui se trouve encore dans une autre bande, comme dans *Tb* se trouve *bc*, qui se trouve aussi dans *Tc*; & ainsi tout le Quarré contient

5 Quarrez, *bb*. *cc*. *dd*. *ff*. *gg*.
20 Rectangles, 2*bc*. 2*bd*. 2*bf*. 2*bg*.
2*cd*. 2*cf*. 2*cg*.
2*df*. 2*dg*.
2*fg*.

Corollaire.

XIII. Le plus grand usage de ces Theorémes est quand la ligne est coupée en deux. C'est pourquoy il faut bien retenir ces trois Propositions:

1. Le Quarré de la toute est égal aux deux Rectangles de chaque partie par la toute.

2. Le Rectangle d'une partie par la toute est égal au Quarré de cette partie, plus le Rectangle des deux parties.

3. Le Quarré de la toute est égal aux 2 Quarrez de chaque partie, plus deux fois le Rectangle des deux parties.

De la proportion entre les Rectangles.

Proposition fondamentale.

Les Rectangles qui ont un côté égal à un côté, & l'autre inégal, sont entr'eux comme l'inégal. Ou,

Ou, les Rectangles de même hauteur sont comme leurs bases.

D'égale base sont comme leurs hauteurs.

Ou, d'égale longueur sont comme leurs largeurs.

D'égale largeur sont comme leurs longueurs.

Tout cela n'est que la même chose, & peut passer pour prouvé dans le 1.e Livre.

Neanmoins en voicy encore la preuve. La these est

bc. bd. :: c. d.

L'aliquote quelconque de *c* soit appellée *x*.

Si par tous les points de la division on tire des paralleles à *b*, il est clair que *b x* sera autant de fois dans *b c*, qu'*x* dans *c*. C'est à dire que *b x* & *x* seront toûjours les aliquotes pareilles, l'une de *b c*, & l'autre de *c*. Car il est bien clair, que toutes les *x* étant égales, tous les *b x* seront égaux.

Que si on applique *x* à *d*, & qu'on tire aussi par tous les points de la division des paralleles à *b*: il est clair que *b x* sera autant de fois dans *b d*, qu'*x* dans *d*; & que si *x* est précisément tant de fois dans *d*, *b x* sera aussi precisément tant de fois dans *b d*. Et si *x* n'est pas precisément tant de fois dans *d*, mais avec quelque reste, *b x* de même ne sera pas precisément tant de fois dans *b d*, mais avec un Rectangle de reste plus petit que *b x*.

Donc les aliquotes pareilles de *b c* & de *c* sont également contenuës, celles de *b c* dans *b d*, & celles de *c* dans *d*.

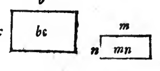
Donc, par la definition de l'égalité des raisons, *b c* & *b d* sont en même raison que *c* & *d*; puis-

 que

que les aliquotes pareilles des antecedens *b c* & *c* sont également contenuës dans les consequens *b d* & *d*. Donc *b c. b d.* :: *c. d.*

I. Corollaire.

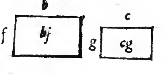
XV. Les Rectangles sont en raison composée de la longueur à la longueur, & de la largeur à la largeur. C'est la definition même de la raison composée. III. 25 & 26.



b c. m n. :: *b. m.* + *c. n.*

II. Corollaire.

XVI. Les Rectangles semblables sont en raison doublée de leurs côtez homologues.



Car les Rectangles sont semblables, quand la longueur est à la longueur, comme la largeur à la largeur.

b f & *c g* sont semblables, si *b. c.* :: *f. g.*

Donc la raison de ces deux Rectangles est composée de deux raisons égales, par le premier Corollaire.

Donc cette raison est doublée de chacune, par la definition de la raison doublée. III. 24.


III.

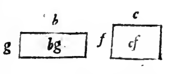
III. Corollaire.

Les Quarrez sont en raison doublée de leurs racines. C'est la même chose que le precedent. XVII.

Et ainsi si *b* est double de *d*, *bb* est quadruple de *dd*.

IV. Corollaire.

Les Rectangles reciproques sont égaux. Car on appelle les Rectangles reciproques quand la longueur du premier est à la longueur du second, comme la largeur du second est à la largeur du premier. III. 37. XVIII.



Ainsi *b g* & *c f* sont reciproques, si

b. c. : : f. g.

Or la grandeur plane des deux extremes d'une Proportion est égale à la grandeur plane des moyens.

Donc *b g* = *c f*. II. 73.

MESMES COROLLAIRES AUTREMENT PROPOSEZ.

Si 4 lignes sont proportionelles, XIX.

b. c. : f. g.

1. Le Rectangle *bf* des antecedens, est au Rectangle *cg* des consequens, en raison doublée de la raison *b. c.* ou *f. g.* de cette Proportion. III. 29.

2. Le Rectangle *b c* des deux premiers termes est au Rectangle *f g* des deux derniers en raison doublée de la raison alterne *b. f.* ou *c. g.* de cette Proportion. (16. S.)

3. Le Rectangle des deux extremes est égal au Rectangle des deux moyens, *b g* $=$ *c f.* II. 73.

4. Les Quarrez de ces quatre lignes sont proportionels, *bb. cc.* :: *ff. gg.* par III. 32.

5. Si trois lignes sont continüement proportionelles, le Quarré de celle du milieu est égal au Rectangle des extremes.

Si ÷ *b. c. d.* *cc* $=$ *b d.* II. 73 & 82.

6. Les Quarrez des deux premiers *bb* & *cc* sont en même raison que la premiere & la troisiéme.

bb. cc :: *b. d.* par III. 34.

V. Corollaire.

11. Une ligne étant divisée en deux parties, si deux autres lignes sont moyennes proportionelles, l'une entre la toute & sa plus grande partie, & l'autre entre la même toute & sa plus petite partie : les deux Quarrez de ces deux lignes sont égaux au Quarré de cette toute.

Soit *h* divisée en *m* & *n*.

Soit *b* moyenne entre *h* & *m*.

Et *d* entre *h* & *n*.

Puisque ÷ *h.b.m.* *bb* $=$ *hm*.

Et puisque ÷ *h.d.n.* *dd* $=$ *hn*.

Donc *bb* + *dd* $=$ *hm* + *hn*.

Or *hm* + *hn* $=$ *hh*. (10. *sup.*)

Donc *bb* + *dd* $=$ *hh*.

[A]VERTISSEMENT.

1. *On peut rapporter ici tout ce qui a été demontré des Grandeurs planes en general dans le II. & le III.*

III. Livre. Car le Rectangle est une grandeur plane en matiere d'Etenduë ou d'Espace.

APPLICATION DE CETTE DOCTRINE generale à quelques lignes particulieres qu'on a fait voir ci-devant être proportionelles.

I. Theoréme.

Si deux lignes se coupent dans un Cercle, le Rectangle des portions de l'une est égal au Rectangle des portions de l'autre. Voyez XI. 27. & XIV. 18. XXII.

II. Theoréme.

Le Quarré de la perpendiculaire d'un point de la circonference au diametre, est égal au Rectangle des portions du diametre. Voyez XI. 29. & XIV. 19. *Art.* 5. XXIII.

III. Theoréme.

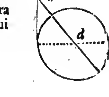
Si d'un point hors le Cercle deux lignes sont menées jusqu'à la concavité du Cercle: le Rectangle d'une toute & de sa portion qui est hors le Cercle, est égal au Rectangle de l'autre toute & de sa portion qui est aussi hors le Cercle. Voyez XI. 31. & XIV. 18. XXIV.

IV. Theoréme.

Si d'un point hors le Cercle on méne une ligne qui touche le Cercle, & l'autre qui le coupe jusqu'à la concavité: le Quarré de la tangente est égal au Rectangle de l'autre toute, & de sa portion XXV.

qui est hors le Cercle. XI. 33. & XIV. 19. *Art.* 5.

Et si on appelle la tangente p, la secante entiere t, la partie qui est hors le Cercle h, & celle qui est au dedans d, on aura toutes ces égalitez par ce qui a été dit cy-devant :

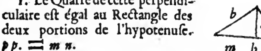


$pp = ht.$
$pp = hh + hd.$
$hh = pp + hd.$
$tt = ht + dt.$ (10. S.)
$tt = pp + dt.$

V. Theoréme.

XXVI. Si du sommet d'un Angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypotenuse,

1. Le Quarré de cette perpendiculaire est égal au Rectangle des deux portions de l'hypotenuse. $pp. = mn.$



2. Le Quarré du grand côté de l'angle droit est égal au Rectangle de l'hypotenuse entiere & de sa grande portion, $bb = hm.$

3. Le Quarré du petit côté est égal au Rectangle de l'hypotenuse entiere & de la petite portion, $dd = hn.$

4. Le Quarré de toute l'hypotenuse est égal aux Quarrez des deux côtez, $hh = bb + dd.$

Les 3. premiers points sont clairs, par XI. 52. & par 19. S. *Art.* 5.

Et le 4.e par le 5.e Corollaire S.

I. Corollaire.

XX[illegible] La diagonale d'un Rectangle peut autant que les Quarrez des deux côtez.

II.

II. Corollaire.

La diagonale d'un Quarré peut 2 fois le Quarré du côté. XXVIII.

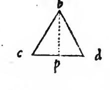
III. Corollaire.

La diagonale d'un Quarré est incommensurable en longueur au côté, & commensurable en puissance. XI. 71. XXIX.

IV. Corollaire.

La hauteur d'un Triangle équilateral, (c'est à dire la perpendiculaire du sommet à la base,) est incommensurable en longueur au côté, & commensurable en puissance; le Quarré du côté étant au Quarré de cette perpendiculaire comme 4 à 3. XXX.

La premiere partie est claire, par XI. 73.



La seconde se prouve ainsi: *p d* est la moitié de *b d*. Donc le Quarré de *b d* est au Quarré de *p d* comme 4 à 1. (17. *Sup.*) Or ce même Quarré de *p d*, plus celuy de *b p*, est égal au quarré de *b d*. (26. *Sup.*)

Donc le Quarré de *b d* est à celuy de *b p* comme 4 à 3.

VI. Theoréme.

Le Quarré de la base d'un angle aigu, est égal aux Quarrez des côtez qui le comprennent, moins deux fois le Rectangle du côté sur lequel on méne une perpendiculaire de l'extremité opposée de la base, & de la ligne comprise entre le sommet de cét angle aigu & cette perpendiculaire. XXXI.

Soit

Soit la base de l'angle aigu nommée b.

Le côté vers lequel on ne méne point la perpendiculaire, c.

Celuy sur lequel on la méne, d.

La perpendiculaire, p.

La ligne comprise entre la perpendiculaire & le sommet de l'angle aigu, x.

Celle qui est comprise entre la perpendiculaire & la base, y.

Je dis que $bb = cc + dd - 2dx$.

Mais il faut remarquer qu'x est quelquefois $d - y$.

Quelquefois d simplement.

Et quelquefois $d + y$.

Selon que d fait sur la base, ou un angle aigu, ou un droit, ou un obtus.

Mais quand d fait un angle droit sur b, il est plus court de dire que bb base de l'angle aigu, est égal à cc moins dd, comme il est clair par le precedent Theoréme. Et ainsi il reste seulement les deux autres cas.

PREMIER CAS.

QUAND d fait sur la base un angle aigu, la perpendiculaire coupe d en deux parties.

Et ainsi $d = x + y$; & $x = d - y$.

Et alors le Theoréme se prouve ainsi :

Par le precedent Theoréme $bb = pp + yy$.

Et $cc = pp + xx$.

Et $dd = yy + xx + 2xy$. (par 13. *Sup.*)

Donc bb est moindre que $cc + dd$, de $2xx$ & $2xy$.

C'est à dire que $bb = cc + dd - 2xx - 2xy$.

Or x étant égale à $d - y$, $xx = dx - xy$.

Donc $xx + xy = dx$.

Donc

Donc $2xx + 2xy = 2dx$.

Donc $bb = cc + dd - 2dx$. Ce qu'il falloit demontrer.

Second Cas.

Si d fait un angle obtus sur b, alors p ne tombe sur d qu'étant prolongé, & y est une ligne ajoûtée à d, & x est égale à $d+y$. Ce qui fait qu'on prouve ainsi que $bb = cc + dd - 2dx$.

$pp = cc - xx$, c'est-à-dire $-dd - yy - 2dy$.

Or $bb = pp + yy$.

Donc $bb = cc - dd - 2dy$.

Et par consequent $bb = cc + dd - 2dd - 2dy$.

Or $x = d + y$. Donc $dd + dy = dx$.

Donc $2dd + 2dy = 2dx$.

Donc $bb = cc + dd - 2dx$. Ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

De tout ceci il est aisé de conclure que si des deux extremitez de la base d'un angle aigu, on tire des perpendiculaires à chaque côté : le Rectangle d'un côté & de la ligne comprise entre le sommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe sur ce côté, sera toûjours égal au Rectangle de l'autre côté & de la ligne comprise entre le sommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe sur cét autre côté. XXXII.

VII.

VII. Theoréme.

XXXIII. Le Quarré de la base d'un angle obtus est égal aux Quarrez des côtez, plus deux fois le Rectangle du côté vers lequel on aura mené une perpendiculaire de l'extremité de cette base, & de la ligne comprise entre cette perpendiculaire & le sommet de l'angle obtus.

Il est clair que cette perpendiculaire ne peut tomber sur aucun côté qu'en le prolongeant.

Soit donc la base b.
Le côté non prolongé c.
L'ajoûtée y.
La perpendiculaire p.
Je dis que $bb = cc + dd + 2\,dy$.

Car bb est égal au Quarré de p, plus le Quarré de $d+y$. C'est à dire que
$bb = pp + yy + dd + 2\,dy$.
Or $cc = pp + yy$.
Donc $bb = cc + dd + 2\,dy$. Ce qu'il falloit demontrer.

Avertissement

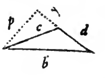
XXXIV. *On peut faire ici un Corollaire semblable à celui du Theoréme precedent. Je le laisse à chercher, & à prouver si l'on veut par les principes du Livre des Lignes proportionelles.*

VIII. Theoréme.

XXXV. Le Quarré de la base d'un angle obtus qui vaut les deux-tiers de deux angles droits, (c'est à dire qui est de 120 degrez,) est egal aux Quarrez des deux côtez, plus le Rectangle de ces deux mêmes côtez.

Toutes choses étant faites, & les lignes nommées

mées comme dans le precedent Theoréme, l'angle obtus ne peut valoir 120 degrez, que l'angle que fait c sur l'ajoûtée y, (qui est le complement de cét angle obtus,) ne soit de 60 degrez. Or le Triangle que font c, y, p, est rectangle. Donc y est le sinus d'un angle de 30 degrez. (VIII. 37.) Donc (par XIII. 31.) y est la moitié de c, qui en est le rayon.



Donc $dc = 2dy$.

Or par le precedent Theoréme,

$bb = cc + dd + 2dy$.

Donc $bb = cc + dd + dc$.

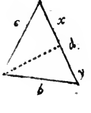
IX. Theoréme.

Le Quarré de la base d'un angle aigu de 60 degrez est égal aux Quarrez des côtez, moins le Rectangle des côtez. XXXVI.

Car par le 6.e Theoréme b étant la base d'un angle aigu,

$bb = cc + dd - 2dx$.

Or x en tous les cas, (c'est à dire soit qu'x soit ou $d - y$, ou d simplement, ou $d + y$,) est toûjours le sinus d'un angle de 30 degrez dont c est le rayon, quand l'angle que soûtient b est de 60 degrez.



Donc x est toûjours la moitié de c, par XIII. 31.

Donc $dc = 2dx$.

Donc $bb = cc + dd \left\{ \begin{matrix} - 2dx. \\ \text{ou} \\ - dc. \end{matrix} \right.$

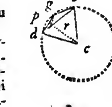
X. Theoréme.

Le Quarré du côté du Pentagone est égal au Quarré XXXVI

Quarré du côté du Decagone, plus le Quarré du côté de l'Hexagone inscrits dans le même Cercle.

Soit *b d* le côté du Pentagone.

c b & *c d* deux demy-diametres du Cercle dans lequel il est inscrit, qui sont aussi les côtez de l'Hexagone, par XII. 36.



d g & *g b* deux côtez du Decagone.

c p une ligne qui coupe perpendiculairement & par la moitié, tant le côté *d g* du Decagone, que l'arc *d g*: & qui coupe en *r* le côté du Pentagone.

Cela étant, je prouve 1.° Que *b c* (côté de l'Hexagone) est moyen proportionel entre *b d* côté du Pentagone, & sa partie *b r*.

Car les deux angles vers *b* & vers *d* sont chacun de 54 degrez, XII. 23.

Or l'angle *r c b* est aussi de 54 degrez, puisque l'arc *g b* est de 36 degrez, XII. 21. & l'arc *g p* de 18, ce qui ensemble fait 54.

Donc les deux Triangles *b c d*, & *b r c* sont isosceles & semblables.

Donc par XI. 20. *b c* est moyen proportionel entre *b d* & *b r*; c'est à dire entre le côté du Pentagone & sa plus grande partie.

Je prouve 2.° Que *d g* côté du Decagone, est moyen proportionel entre *b d* côté du Pentagone, & *d r* sa plus petite partie.

Car *r p* coupant *g d* perpendiculairement & par la moitié, *r g* est égale à *r d*. Donc les angles que chacune fait sur *g d* sont égaux. XIII. 10.

Donc les deux Triangles *d g b* & *d r g* sont isosceles & semblables. Donc par XIII. 34. *d g* (base du petit & côté du grand) est moyen proportionel entre *b d* (base du grand) & *r d* (côté du petit.)

Donc

Donc le côté du Decagone est moyen proportionel entre le côté du Pentagone & sa plus petite partie.

Donc par le 5.e Corollaire (20. *sup.*) le Quarré du côté du Pentagone est égal au Quarré du côté de l'Hexagone, plus le Quarré du côté du Decagone inscrits dans le même Cercle. Ce qu'il falloit demontrer.

XI. Theoréme.

Si une ligne est divisée en moyennne & extreme raison, la ligne composée de la moitié de cette ligne & de sa plus grande partie, peut 5 fois le Quarré de la moitié. XXXVIII.

Soit la ligne d divisée en moyenne & extreme raison, en sorte que $bb = dd - db$, & par consequent $bb + db = dd$.

Appellant m la moitié de d, je dis que le Quarré de $m + b$ vaut 5 fois le Quarré d'm.

Car m étant la moitié de d, $dd = 4mm$. Et $2mb = bd$.

Et ainsi le Quarré de $m + b$

E'tant égal à $mm + bb + 2mb$:

Il sera égal à $mm + bb + db$.

Donc à $mm + dd$.

Donc à $mm + 4mm$.

Donc à $5mm$.

XII. Theoréme.

Une ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, la ligne composée de la petite portion & de la moitié de la plus grande, peut 5 fois le Quarré de la moitié de la plus grande. XXXIX.

Soit

Soit comme auparavant la toute d, la plus grande partie b, & sa moitié n, la plus petite c; en sorte que $dc = bb$.

Or $dc = cc + cb$. (13. *sup.*) Donc $cc + cb = bb$.

Cela étant, je dis que le Quarré de $c + n = 5nn$.

Car ce Quarré de $c + n$

Est égal à $cc + nn + 2cn$.

Donc à $cc + nn + bc$, (puisque n est $\frac{1}{2}$ de b.)

Donc à $nn + bb$, (puisque $bb = cc + bc$.)

Donc à $nn + 4nn$. Donc à $5nn$. Ce qu'il falloit demontrer.

XIII. Theorémé.

XL. Une ligne étant divisée en moyenne & extreme raison, le Quarré de la toute, plus le Quarré de la plus petite partie, valent 3 fois le Quarré de la plus grande.

Soit comme auparavant $d = b + c$; & b moyenne proportionnelle entre d & c, en sorte que $bb = dc$, & par consequent à $cc + cb$. Je dis que $dd + cc = 3bb$.

Car $dd = bb + cc + 2cb$.

Donc $dd + cc = bb + 2cc + 2cb$.

Or $2cc + 2cb = 2bb$, puisque $cc + cb = bb$.

Donc $dd + cc = 3bb$. Ce qu'il falloit demontrer.

I. Probleme.

XLI. Trouver le Quarré égal à un Rectangle donné.

Ou

Ou ayant l'aire d'un Quarré, en trouver la racine.

Il ne faut que trouver la moyenne proportionelle entre les côtez du Rectangle donné.

Ou entre les deux lignes qui font l'aire donnée; comme si l'aire est supposée de 20 toises, ou pieds, ou pouces, entre 1 & 20, ou 2 & 10, ou 4 & 5.

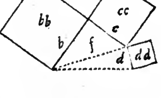
II. Probleme.

Avant le côté d'un Rectangle, trouver quel doit être l'autre, afin qu'il soit égal à un Rectangle donné. XLII.

Prendre le côté donné pour premier terme d'une Proportion; les deux côtez du Rectangle donné pour 2.e & 3.e. Le côté que l'on cherche se trouvera en trouvant une 4.e proportionelle, par X. 34.

III. Probleme.

Trouver un Quarré égal a deux ou plusieurs Quarrez donnez. XLIII.



Soient les Quarrez donnez *bb*, *cc*, *dd*. Mettant *b* & *c* à angle droit, le Quarré de l'hypotenuse de cét angle droit que je nomme *f*, sera égal à *bb* + *cc*. Et mettant de nouveau *f* & *d* à angle droit, le Quarré de l'hypotenuse de cét angle sera égal à *ff* + *dd*, & par consequent à *bb* + *cc* + *dd*. Et on peut conduire cela jusqu'à l'infini.

Corollaire.

Trouver le Quarré égal à plusieurs Rectangles donnez. XLIV.

II

Il ne faut que trouver les Quarrez égaux à chacun de ces Rectangles. Et puis on trouvera le Quarré égal à tous ces Quarrez.

IV. Probleme.

XLV. Trouver un Quarré auquel un Quarré donné soit en raison donnée.

Soit le Quarré donné *b b*.

La raison donnée *m. n.*

Ayant disposé *m*, *n*, *b*, comme les trois premiers termes d'une Proportion, & trouvé *d* pour 4.e proportionelle, par X. 34. en sorte que

m. n. :: b. d.

Et trouvant aussi par XI. 58. la moyenne proportionelle entre *b* & *d*, que je suppose être *c*: le Quarré de *c* satisfera au Probleme. Car puisque

$\div$ *b. c. d.*

bb. cc. :: b. d. (19. S. *Art. 6.*)

Or *b. d :: m. n.*

Donc *bb. cc :: m. n.*

V. Probleme.

XLVI. Diviser une ligne, en sorte que le Quarré de la plus grande portion soit égal au Rectangle de la toute & de la plus petite portion.

Ce Probleme a été resolu (XI. 62.) quand on a appris à couper une ligne en moyenne & extreme raison: c'est à dire, en sorte que la toute soit à la plus grande portion, comme la plus grande portion à la plus petite.

VI. Probleme.

XLVII. Diviser une ligne en sorte que le Quarré de la

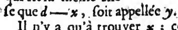
la plus grande portion soit au Rectangle de la toute & de la plus petite portion en raison donnée.

Soit la ligne donnée d.

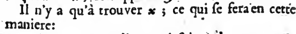
La raison donnée $m. n.$

La plus grande portion que l'on cherche, x.

Et la plus petite, qui est la même chose que $d - x$, soit appellée y.



Il n'y a qu'à trouver x; ce qui se fera en cette maniere:



1. Trouver une ligne qui soit à d, comme m est à n. Je la suppose trouvée par X. 34. & je l'appelle c.

2. Chercher la moyenne proportionnelle entre c & d. Je la suppose trouvée par XI. 58. & je l'appelle p; d'où il s'ensuivra que $cd = pp$. (19. S. *Art.* 5.)

3. Faire un Cercle qui ait c pour diametre, & p pour tangente. Si de l'extremité de p qui est hors le Cercle on tire une secante qui passe par le centre du Cercle: la partie de cette secante qui est au dedans du Cercle étant c, celle qui est au dehors sera x. Et $d - x$ sera y. D'où il s'ensuivra

4. Que $cd - cx$ sera la même chose que cy. Car y étant égale à $d - x$, c'est la même chose de multiplier c par $d - x$, (ce qui fait $cd - cx$,) que de multiplier c par y; ce qui fait cy.

Cela étant ainsi, il est facile de prouver que

$xx. dy. :: m. n.$

C'est à dire que le Quarré de la plus grande partie de d est au Rectangle de d par l'autre partie que j'ay nommée y, en raison donnée.

Car p qui est tangente par la 3.e supposition, est moyenne proportionelle entre x & $x + c$. (25. S.)

Donc $x. p. :: p. x + c.$

Donc $xx + cx = pp$. (19. S. *Art.* 3.)

T Or

Or $pp = cd$ (par la 2.e supp.)
Donc $xx + cx = cd$.
Donc $xx = cd - cx$.
Or $cd - cx = cy$ (par la 4.e supp.)
Donc $xx = cy$.
Or $cy. dy. :: c. d.$ (II. 58.)
Et $c. d :: m. n.$ (par la 1.re supp.)
Donc xx (égal à cy) $dy. :: m. n.$ ce qu'il falloit demontrer.

VII. Probleme.

XLVIII. Trouver la racine d'un Quarré dont on ne sçait autre chose, sinon qu'étant comparé au Quarré d'une ligne donnée, & à un Rectangle d'une autre ligne donnée & de cette racine inconnuë, il est

Ou { 1. Egal au Quarré plus le Rectangle.
2. Egal au Quarré moins le Rectangle.
3. Egal au Rectangle moins le Quarré. }

Ainsi la racine inconnuë étant nommée x ou y;
La ligne donnée qui fait le Quarré, b;
Et l'autre ligne donnée côté du Rectangle, d.
Le 1.er Cas sera $yy = bb + yd$.
Le 2.e Cas, $xx = bb - xd$.
Et le 3.e { $yy = yd - bb$.
$xx = xd - bb$. }

CONSTRUCTION COMMUNE au premier & au second Cas.

Decrire un Cercle de l'intervalle de la moitié de d, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de b.

Et tirer de l'autre extremité de b une secante qui passant par le centre du Cercle se termine à la circonference.

Cette

Cette secante entiere soit appellée y;

Qui sera composée de sa partie hors le Cercle appellée x,

Et du diametre du Cercle, qui sera d par la construction.

Et b sera tangente du Cercle.



PREUVE DU PREMIER CAS.

Dans le 1.er Cas, c'est y, (c'est à dire la secante entiere,) qui est la racine que l'on cherche.

Car y étant égale à $x + d$,

$yy = yx + yd$. *sup.* 13.

Or $bb = xy$. *sup.* 25.

Donc $yy = bb + yd$. Ce qu'il falloit demontrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Dans le 2.e Cas, c'est x, (c'est à dire la partie de la secante qui est hors le Cercle,) qui est la racine que l'on cherche.

Car $x.\ b.\ ::\ b.\ x + d$.

Donc $xx + xd = bb$.

Donc $xx = bb - xd$. Ce qu'il falloit demontrer.

CONSTRUCTION ET PREUVE DU TROISIÉME CAS.

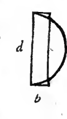
Faisant un Cercle qui ait d pour diametre, & b pour tangente, il faut tirer une parallele à d de l'extremité de b qui est hors le Cercle.

Que si cette parallele ne coupe point le Cercle, parce que b est aussi grande ou plus grande que la moitié de d, le Probleme est impossible.

Mais si elle le coupe: tirant une tangente parallele à b de l'autre extremité de d, & prolongeant

 jus-

jusqu'à cette tangente la secante parallele à d: cette secante (égale à d) sera composée de trois parties ; de deux hors le Cercle, qui étant égales, (comme il est aisé de le prouver en tirant du centre une perpendiculaire à cette secante,) chacune s'appellera x, & celle de dedans le Cercle plus une de dehors, c'est à dire plus x, s'appellera y.



Cela étant supposé, je dis qu'x & y peuvent l'une & l'autre satisfaire au Probleme.

Car $xy = bb$, par le 4.e Theoréme, 25. S.

Et d étant égale à $x+y$,

$xx+xy = xd.$ } par 13. *sup.*
Et $yy+xy = yd.$ }

Donc $xx = xd - xy$ égal à bb.

Et $yy = yd - xy$ égal à bb.

Donc soit qu'on prenne x ou y, on satisfait au Probleme. Et le choix depend de sçavoir d'ailleurs si la racine que l'on cherche doit être plus petite que b, car alors c'est x; au lieu que si elle doit être plus grande, c'est y.



NOU-



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUINZIE'ME.

DE LA MESURE DE L'AIRE des Parallelogrammes, des Triangles, & autres Polygones.

DEFINITIONS.

QUAND on parle des côtez d'un Parallelogramme, on entend les côtez angulaires, à moins qu'on ne marque autre chose. 1.

On peut prendre lequel on veut de ces côtez pour mesure de la longueur du Parallelogramme; & alors ce côté s'appelle la base.

Et la perpendiculaire qui mesure la distance entre la base & son côté opposé s'appelle la hauteur du Parallelogramme.

FONDEMENT DE LA MESURE des Parallelogrammes.

11. Nous avons dit au commencement du Livre precedent, que dans les Parallelogrammes non rectangles, (à qui pour abreger nous donnerons simplement le nom de Parallelogrammes,) on pouvoit prendre lequel on vouloit de leurs côtez angulaires pour mesure de l'une de leurs dimensions, qui est la longueur; mais que l'autre côté angulaire ne pouvoit pas en mesurer la largeur, parce qu'étant oblique il ne mesuroit pas la distance entre les côtez opposez qui avoient été pris pour la longueur. Et ainsi au lieu de cét autre côté angulaire, il faut prendre la perpendiculaire qui mesure la distance entre le premier côté & son opposé, pour avoir l'autre dimension de ces Parallelogrammes.

Or de là il s'ensuit que le Rectangle de la base & de cette perpendiculaire appellée la hauteur du Parallelogramme, est égal à ce Parallelogramme: puisque n'ayant tous deux que deux dimensions, longueur & largeur: la longueur de l'un est égale à la longueur de l'autre, en ce qu'ils ont tous deux une base égale: & que la largeur de l'un est égale à la largeur de l'autre, puisqu'elle est mesurée par une perpendiculaire égale dans l'un & dans l'autre; quoy qu'en l'un elle soit l'un des côtez de la figure, sçavoir dans le Rectangle, & que dans l'autre elle n'y soit pas marquée.

Cela pourroit suffire pour ceux qui cherchent plûtost à s'asseurer de la verité, qu'à en pouvoir convaincre les autres.

Neanmoins pour plus grande certitude, on peut employer deux voyes pour prouver cette proposition:

tion : l'une nouvelle appellée la *Geometrie des Indivisibles* : & l'autre ancienne & plus commune. Nous expliquerons l'une & l'autre.

NOUVELLE METHODE APPELLE'E LA GEOMETRIE DES INDIVISIBLES.

QUOIQUE les Geometres conviennent que la ligne n'est pas composée de points, ny la surface de lignes, ny le solide de surfaces : neanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de demontrer une infinité de choses, en considerant les surfaces comme si elles étoient composées de lignes, & les solides de surfaces. III.

Je n'ay rien veu de ce qui en a été écrit : mais voici ce qui m'en est venu dans l'Esprit, en ne m'arrêtant maintenant qu'à ce qui regarde les surfaces.

Le fondement de cette nouvelle Geometrie est de prendre pour l'aire d'une surface la somme des lignes qui la remplissent ; de sorte que deux surfaces sont estimées égales, quand l'une & l'autre est remplie par une somme égale de lignes égales ; soit que chacune de celles d'une somme soit égale à chacune de celles de l'autre somme ; soit qu'il se fasse une compensation ; en sorte par exemple, que deux d'une somme qui pourront être inégales entr'elles, soient égales à deux prises ensemble de l'autre somme qui seront égales entr'elles.

Mais pour ne pas donner lieu à beaucoup de paralogismes où l'on tombe aisément en se servant de cette methode, si on n'y prend bien garde, il faut remarquer,

1. Qu'afin que des lignes soient censées remplir un espace, il faut qu'elles soient toutes paralleles entr'elles ; soit qu'elles soient droites, pour rem-

plir un espace rectiligne : soit qu'elles soient circulaires, pour remplir des Cercles ou des portions de Cercles. Il est facile d'en voir la raison. Et ainsi il faut bien prendre garde de ne pas employer pour cela des lignes qui ne seroient pas paralleles en l'une ou l'autre de ces deux manieres.

2. Afin qu'une somme de lignes soit censée égale à une autre somme de lignes, il ne faut pas s'imaginer qu'on puisse dire le nombre qu'en contient chaque espace, (car il n'y a point de si petit espace qui n'en contienne un nombre infini :) mais ce qui fait qu'on appelle ces sommes égales, c'est que toutes les lignes d'un côté & d'autre coupent perpendiculairement deux lignes égales. Par exemple si la ligne *b* est égale à la ligne *m*, le nombre infini des lignes qui peuvent couper perpendiculairement *b*, en tous ses points, est censé égal au nombre infini de celles qui peuvent aussi couper perpendiculairement *m* ; étant visible qu'il n'y a point de raison pourquoy on en puisse faire passer davantage par l'une que par l'autre. Car les aliquotes pareilles de l'une & de l'autre étant toûjours égales juques à l'infini : on pourra toûjours de part & d'autre tirer par tous les points de ces divisions autant de lignes paralleles entr'elles, & qui contiendront toûjours de part & d'autre un espace parallele égal. Et c'est proprement de là que depend la verité de cette nouvelle methode, (& non que le continu soit composé d'indivisibles ;) ce qui l'a fait mêmes appeller par quelques-uns, *la Geometrie de l'infini.*

b m

Il faut donc bien prendre garde que les lignes, par le rapport desquelles on dit qu'une somme de ces lignes paralleles qui remplissent un espace, est

égale

égale à une autre somme, les coupent perpendiculairement. Et c'est où il y a plus de danger de se tromper. Sur ces fondemens voicy les Theorémes que l'on établit.

I. THEORÉME.

Tous les Parallelogrammes de base égale & de même hauteur sont égaux entr'eux. IV.

Soient divers Parallelogrammes, comme A, E, I,



enfermez dans le même espace parallele, (comme ils le peuvent être, puisqu'ils sont supposez de même hauteur,) & ayant tous les bases égales. Il est clair que toutes les paralleles qui peuvent remplir cét espace, rempliront tous ces Parallelogrammes ; & qu'ainsi ils seront tous remplis d'une somme égale de lignes, cette somme étant mesurée dans tous par la perpendiculaire qui mesure la hauteur de ces Rectangles, qui est la même en tous, puisqu'ils sont de même hauteur.

De plus, toutes ces lignes étant paralleles à la base dans tous ces Rectangles, sont égales en tous; puisqu'elles sont en tous égales à la base, & que les bases sont supposées égales.

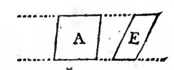
Donc il y a partout somme égale de lignes égales.

Donc ils sont tous égaux, selon le fondement de la Geometrie des indivisibles.

II. THEORÉME.

Tous les Parallelogrammes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. V.

C'eſt une ſuite du precedent. Soient les Parallelogrammes A, E, entre mêmes paralleles, & qui ayent des baſes inégales. En quelques



aliquotes que je diviſe la baſe d'A: en tirant des paralleles au côté par tous les points de la diviſion, il y aura dans A autant de Parallelogrammes égaux entr'eux, que cette baſe aura de parties égales; de ſorte que ſi elle avoit été diviſée en 7 parties, dont j'appelleray chacune *x*, il y aura dans A 7 Parallelogrammes qui auront chacun *x* pour baſe.

Que ſi appliquant *x* à la baſe d'E, il ſe trouve qu'il y ſoit trois fois, ou ſans reſte, ou avec reſte: tirant encore de tous les points de la diviſion, des lignes paralleles au coté d'E, il eſt viſible qu'il y aura dans E autant de Parallelogrammes qui auront *x* pour baſe, qu'*x* ſe ſera trouvée dans la baſe d'E. Et ſi ç'a été ſans reſte, ces trois Parallelogrammes rempliront E ſans reſte: & ſi avec reſte, il reſtera auſſi un Parallelogramme qui aura ce reſte pour baſe.

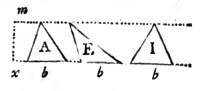
Or les Parallelogrammes qui dans E ont *x* pour baſe, ſont égaux à ceux qui dans A ont auſſi *x* pour baſe; par le precedent Theoréme.

Donc, par la definition de l'égalité des raiſons, A eſt à E en même raiſon que la baſe d'A à la baſe d'E; puiſqu'autant que les aliquotes quelconques de la baſe d'A ſont contenuës dans la baſe d'E, les aliquotes pareilles d'A ſont contenuës dans E: ſi ſans reſte, ſans reſte; ſi avec reſte, avec reſte.

III. Theoréme.

VI. Les Triangles de même hauteur & de même baſe ſont égaux. Car étant mis entre les mêmes paralleles, comme devant, & ayant tous *b* pour baſe,

se, toutes les lignes paralleles qui rempliront cét espace, rempliront ces Triangles; & de chacune de ces lignes tirées tout le long de l'espace d'un point quelconque de la perpendiculaire *m x*, ce qui sera enfermé dans chaque Triangle sera toûjours égal, comme il a été prouvé XIII. 25. & X. 21. quoy que toûjours de plus petit en plus petit montant vers le sommet.



Donc une somme égale de lignes égales chacune à chacune de chaque Triangle, remplit tous ces Triangles.

Donc ces Triangles sont égaux.

IV. Theoréme.

Les Triangles de même hauteur sont entr'eux comme les bases. VII.

C'est la même chose que le 2.e Theoréme, & qui se prouve de la même sorte; excepté qu'on employe icy au lieu de Parallelogrammes des Triangles qui ont *x* pour base, & qui aboutissent de part & d'autre au sommet de chaque Triangle dont ils sont parties. Or ces Triangles qui ont *x* pour base dans l'un & dans l'autre Triangle, sont aussi de même hauteur dans l'un & dans l'autre; & par consequent ils sont égaux. Ensuite dequoy il ne faut qu'appliquer ce que nous avons dit pour la demonstration du 2.e Theoréme.

V. Theoréme.

Le Cercle est égal au Triangle rectangle, qui a pour côtez de son angle droit le rayon du Cercle, & une ligne égale à la circonference du Cercle. VIII.

 Soit



Soit le Cercle *d*; le rayon *d b*; la tangente *b c* égale à la circonference; & l'hypotenuse *d c*.

Si on tire de tous les points du rayon, des circonferences concentriques au Cercle, elles rempliront tout le Cercle, & elles seront paralleles entr'elles, en la maniere que les circonferences le peuvent être, & coupées perpendiculairement par le rayon. VII. 41 & 44.)

Si on tire aussi de tous ces mêmes points du rayon par lesquels auront passé ces circonferences, des paralleles à *b c*, jusques en *d c*: ces paralleles rempliront le Triangle. Et ainsi la somme de ces circonferences & de ces paralleles sera égale, étant determinée de part & d'autre par les points du même rayon; étant clair que l'on ne sçauroit tirer une circonference par aucun point, qu'on ne tire aussi une parallele à *b c* par ce même point, & au contraire.

Or la circonference & la parallele tirées du même point sont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra: par exemple celle du point *b*. Car

b d. *d f*. :: { circonf. *b*. circonf. *f*. (XII. 28.)
{ *b c*. . *f g*. (X. 20.)

Donc circonf. *b*. circonf. *f*. :: *bc* . *fg*.

Donc *alternando*, circonf. *b*. *b c*. :: circonf. *f*. *f g*.

Or par l'hypothese la circonference *b*, qui est celle du Cercle, est égale au côté *b c* du Triangle.

Donc la circonference passant par le point *f*, est égale à *f g*, parallele à *b c*. Le reste s'ensuit.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Je n'en dirai pas davantage de cette nouvelle methode. Il est aisé de juger que ces 5 Theorémes sont de suffisans fondemens pour mesurer sans peine toutes les figures rectilignes, & en trouver les égalitez & les rapports: sur tout en y joignant les principes qui ont été établis dans les 3 premiers Livres. IX.

METHODE COMMUNE.

LEMME OU AXIOME.

DEUX Triangles tout-égaux sont égaux. C'est à dire que lorsque les angles d'un Triangle sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, & les côtez égaux aussi chacun à chacun, ces deux Triangles comprennent un espace égal; en quoi consiste ce qu'on appelle égalité dans les figures. X.

Cela est clair de soi-même, étant visible que deux Triangles de cette sorte ne different que de position.

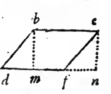
PROPOSITION FONDAMENTALE de la mesure des Parallelogrammes & des Triangles.

TOUT Parallelogramme est égal au Rectangle de sa hauteur & de sa base. XI.

Soit le Parallelogramme *c b d f*. Tirant ses perpendiculaires *b m* & *c n* sur la base *d f*, prolongée autant qu'il est necessaire: je dis que le Rectangle *c b m n*, qui est le Rectangle de la base & de la hauteur de *c b d f*, est égal à *c b d f*.

c b n f m d

Car *b c* étant égale tant à *d f* qu'à *m n*, *d f* est égale à *m n*. Donc ôtant *m f* commune de l'une & de l'autre : *d m* demeurera égale à *f n*. Et ainsi *b d* étant égale à *c f*, & *b m* à *c n*, les Triangles *b d m* & *c f n* sont égaux par le Lemme precedent. Et ainsi ajoûtant à l'un & à l'autre le Trapéze commun *c b m f* : *c b d f* sera égal *c b m n*. Ce qu'il falloit demontrer.



I. COROLLAIRE.

XII. LES Parallelogrammes de même hauteur & de base égale sont égaux.

Car ils ont tous pour leur mesure commune le même Rectangle de cette hauteur & de cette base.

II. COROLLAIRE.

XIII. LES Parallelogrammes de même hauteur sont comme leurs bases ; de base égale, sont comme leurs hauteurs.

Car chacun est égal au Rectangle de sa base & de sa hauteur. Or les Rectangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. XIV. 14. Il en faut donc dire de même des Parallelogrammes qui leur sont égaux.

On peut aussi prouver ce 2.e Corollaire par le premier, de la même façon qu'on a déja fait en demontrant le 2.e Theoréme de la premiere methode.

III. COROLLAIRE.

XIV. LA raison de deux Parallelogrammes quelconques est toûjours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base.

Car les Parallelogrammes sont toûjours entr'eux comme les Rectangles de leur hauteur & de leur base.

IV. Co-

IV. COROLLAIRE GENERAL.

TOUT ce qui a été dit de la raison des Rectangles par la comparaison de leurs côtez angulaires, est vray des Parallelogrammes, en comparant la hauteur à la hauteur, & la base à la base. Cela est clair par la raison du precedent Corollaire. XV.

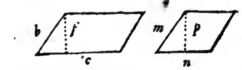
DES PARALLELOGRAMMES EQUIANGLES.

THEORÉME GENERAL.

LES Parallelogrammes équiangles sont entr'eux en raison composée de leurs côtez angulaires, de même que s'ils étoient rectangles. XVI.

Car tous les Parallelogrammes sont entr'eux en raison composée de celle de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

Or quand ils sont équiangles, la raison des côtez obliques sur la base de chacun est la même que celle de la hauteur à la hauteur. Parce que les lignes également inclinées sont en même raison que leurs perpendiculaires qui mesurent cette hauteur. X. 12.



Exemple. Soient *bc* & *mn* deux Parallelogrammes équiangles, dont les hauteurs soient *f* & *p*.

Par les precedens Corollaires,

bc. mn. :: *c. n.* + *f. p.*

Or *f. p.* :: *b. m.* X. 12.

Donc *bc. mn.* :: *c. n.* + *b. m.* Ce qu'il falloit demontrer.

Co-

COROLLAIRE GENERAL.

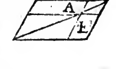
XVII. TOUT ce qui a été dit de la raison des Rectangles entr'eux par la comparaison de leurs côtez angulaires, est vray aussi des autres Parallelogrammes équiangles par la même comparaison de leurs côtez angulaires.

C'est à dire par exemple, que s'ils sont semblables, le grand côté du premier étant au grand côté du second, comme le petit côté du premier au petit côté du second : ils sont en raison doublée de leurs côtez homologues.

Si leurs côtez sont reciproques, (c'est à dire, si le grand côté du premier est au grand côté du second, comme le petit côté du second est au petit côté du premier,) ils sont égaux. Et ainsi de tout le reste.

COROLLAIRE PARTICULIER.

XVIII. LORSQUE deux lignes paralleles chacune aux côtez angulaires d'un Parallelogramme se coupent en un même point de la diagonale, il se fait 4 Parallelogrammes, dont les deux qui ne sont point coupez par la diagonale, comme A & E, sont égaux.



Car ils sont équiangles, puisqu'il y a un angle de l'un qui est opposé au sommet à un angle de l'autre.

Et il est visible par XIII. 50. que le grand côté d'A est au grand côté d'E, comme le petit côté d'E est au petit côté d'A. Donc A $=$ E.

Je sçai bien que cela se prouve ordinairement d'une autre maniere plus palpable ; qui est que la diagonale partage par la moitié tant le Parallelogramme total, que chacun de ceux qui sont autour de cette diagonale. Donc la moitié du total dans laquelle est A étant égale à la moitié dans laquelle

quelle est E, & ôtant de chacune de ces deux moitiez deux Triangles égaux, les deux Parallelogrammes qui demeureront seront égaux.

DES PARALLELOGRAMMES SEMBLABLES.

I. THEORÉME.

DEUX Parallelogrammes semblables, (c'est à dire qui étant équiangles ont leurs côtez proportionels,) sont en raison doublée de leurs côtez homologues, comme il vient d'être dit *sup.* 17. XIX.

II. THEORÉME.

LES côtez homologues de deux Parallelogrammes semblables, étant en même raison que les côtez homologues de deux autres Parallelogrammes semblables entr'eux, ces 4 Parallelogrammes sont proportionels. XX.

Soient les deux premiers semblables A & E, & les deux derniers I & O. Si la raison d'entre les côtez d'A & E est $x. v.$ & de même entre les côtez d'I & O: je dis que

A. E. :: I. O.

Car $\left.\begin{matrix}A. E.\\ I. O.\end{matrix}\right\}$ :: $xx. yy.$

DES TRIANGLES.

LEMME.

TOUT Triangle est la moitié d'un Parallelogramme de même base & de même hauteur. XXI.

Soit le Triangle bcd. Si de b on tire bf égale & parallele à la base cd, & que du point f on tire fd: je dis 1. que $bcdf$ est un Parallelogramme. Car cd & bf sont paralleles

&c.

& égales par la construction ; & par consequent *b e* & *f d* sont aussi paralleles & égales, par VI. 28.

Et par consequent *b d*, qui est la diagonale de ce Parallelogramme, le divise en deux Triangles égaux *b c d* & *b f d*. Donc *b c d* est la moitié de ce Parallelogramme.

Or il est visible que ce Triangle & ce Parallelogramme sont de même hauteur, puisqu'ils sont enfermez entre les mêmes paralleles *b f* & *c d*, & qu'ils ont la même base, sçavoir *c d*.

Donc tout Triangle est la moitié d'un Parallelogramme de même base & de même hauteur.

Theoréme general.

XXII. Tout Triangle est égal au Rectangle de la moitié de sa base, & de toute sa hauteur ; ou de la moitié de sa hauteur & de toute sa base.

Car il est la moitié d'un Parallelogramme de sa base & de sa hauteur. Or ce Parallelogramme est égal au Rectangle de sa base & de sa hauteur.

Donc prenant la moitié de la base & toute la hauteur, ou la moitié de la hauteur & toute la base, on a un Rectangle qui vaut la moitié du Rectangle de toute la base & de toute la hauteur. Donc on a un Rectangle égal au Triangle.

I. Corollaire.

XXIII. Les Triangles de même hauteur & de base égale, sont égaux.

Car ils sont tous égaux au même Rectangle, qui est celuy de la moitié de leur base & de toute leur hauteur.

II. Corollaire.

XXIV. Les Triangles de même hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

Car ils sont tous égaux à des Rectangles, qui étant de

de même hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

On peut aussi prouver ce second Corollaire par le premier, de la même façon qu'on a demontré le 4.e Theoréme de la premiere methode.

III. Corollaire.

La raison de deux Triangles quelconques est toûjours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base. Car ces Triangles sont toûjours entr'eux comme les Rectangles de la moitié de leur base & de toute leur hauteur, qui ont entr'eux cette raison composée. XXV.

IV. Corollaire general.

Tout ce qui a été dit de la raison des Rectangles par la comparaison de leurs côtez, est vray des Triangles par la comparaison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base. XXVI.

DES TRIANGLES EQUIANGLES ou semblables.

I. Theoréme.

Tous les Triangles équiangles & par consequent semblables, sont en raison doublée de la raison de leurs côtez homologues. XXVII.

Car par les Corollaires precedens, les Triangles sont entr'eux en raison composée de la raison de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

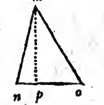
Or quand ils sont équiangles, les côtez sur la base de part & d'autre sont chacun à chacun en même raison que les perpendiculaires du sommet à la base qui en mesurent la hauteur. X. 12.

Et par consequent ils sont en raison composée de celle de la base à la base, & d'un côté à un côté.

Or

Or étant équiangles, la base est à la base comme chacun des côtez à chacun des côtez.

Et par consequent leur raison est composée de deux raisons égales ; ce qui s'appelle raison doublée.





Exemple. Soient deux Triangles semblables *b c d* & *m n o*, dont *b f* & *m p* mesurent les hauteurs.

b c d. m n o. :: *c d. n o.* + *b f. m p.*

Or *b c. m n.* }
b d. m o. } :: *b f. m p.* (X. 18.)
c d. n o. }

Donc tous les côtez ayant la même raison, chacun à chacun, & avec les perpendiculaires : la raison de ces Triangles *b c d* & *m n o* ne peut être composée de la raison des bases *c d* & *n o*, & de celle des hauteurs *b f*, *m p*, qu'ils ne soient en raison doublée de l'une de ces raisons, puisqu'elles sont égales ; & par consequent aussi de la raison des autres côtez homologues, qui est la même.

II. Theoréme.

XXVIII. Si les côtez homologues de deux Triangles semblables sont en même raison que les côtez homologues de deux autres Triangles semblables entr'eux, ces 4 Triangles sont proportionels. C'est la même chose que ce qu'on a demontré des Parallelogrammes. *sup.* 20.

DES

DES FIGURES SEMBLABLES.

I. Theoréme.

Deux figures semblables quelconques sont en raison doublée de leurs côtez homologues. XXIX.

Car par XIII. 26. elles peuvent être partagées chacune en autant de Triangles, tels que ceux d'une part étant semblables à ceux de l'autre, chacun à chacun, les côtez homologues de deux semblables seront en même raison que ceux de deux autres quelconques semblables.

Ainsi supposant qu'elles soient partagées chacune en 4 Triangles qui soient
A. E. I. O.
a. e. i. o.

Par le precedent Theoréme A. *a.* :: E. *e.* :: I. *i.* :: O. *o.*

Donc par II. 52. A + E + I + O. *a* + *e* + *i* + *o*. :: A. *a.*

C'est à dire que la plus grande des figures semblables qui comprend ces 4 Triangles A. E. I. O. sera à la plus petite qui comprend les Triangles *a. e. i. o.* comme l'un de ces Triangles est à son semblable.

Or ces Triangles semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs bases, 27. *Sup.* & les bases de ces deux Triangles semblables sont côtez homologues de ces deux figures, (comme on a veu XIII. 26.)

Donc ces figures semblables sont en raison doublée de leurs côtez homologues.

Corol-

Corollaire.

XXX. Les figures semblables sont entr'elles comme les Quarrez de leurs côtez homologues.

Car, par le Theoréme precedent, les figures semblables sont entr'elles en raison doublée de leurs côtez homologues.

Or les Quarrez de ces côtez homologues sont aussi entr'eux en raison doublée de ces côtez qui sont leurs racines. Donc &c.

II. Theoréme.

XXXI. Si l'on construit sur l'hypotenuse & sur les deux côtez d'un angle droit des figures semblables quelconques : celle qui sera construite sur l'hypotenuse sera égale aux deux qui seront construites sur les côtez.

Soit b le grand côté de l'angle droit, le petit c, l'hypotenuse h.

La figure construite sur b soit nommée A ; sur c, E ; & sur h, I.

Par le Corollaire precedent, *alternando*,

A. bb. :: E. cc. :: I. hh.

Donc A+E. $bb+cc$. :: I. hh. (par II. 52.)

Donc *alternando*,

A+E. I. :: $bb+cc$. hh.

Or $bb+cc = hh$. par XIV. 26.

Donc A+E = I. Ce qu'il falloit demontrer.

Avertissement.

XXXII. *On voit par là que cette proposition quoi que plus generale que celle des Quarrez, n'a dû être traitée qu'apres celle des Quarrez ; parce que le Quarré est*

est la vraye & naturelle mesure de la dimension des autres figures planes.

DES FIGURES REGULIERES.

I. Theoréme.

Tout Polygone est égal au Rectangle du rayon droit, (qui est la perpendiculaire du centre à l'un des côtez) & de la moitié de son perimetre : ou au Triangle qui a pour hauteur ce rayon droit, & pour base ce perimetre. XXXIII.



Car tout Polygone regulier comprend autant de Triangles tout-égaux qu'il a de côtez, lesquels ont tous pour mesure de leur hauteur la perpendiculaire du centre au côté qui leur sert de base.

Donc chaque Triangle est égal au Rectangle de ce rayon droit qui est leur hauteur, & de la moitié de la base. 22. *sup.*

Or toutes ces moitiez des bases de ces Triangles prises ensemble font la moitié du perimetre, puisque toutes les bases font tout le perimetre.

Donc le Rectangle de cette perpendiculaire & de la moitié du perimetre est égal à tous ces Triangles, & par conséquent au Polygone.

Et c'est la même chose du Triangle qui a pour hauteur cette perpendiculaire, & pour base tout le perimetre, puisqu'il est égal à ce Rectangle. 22. *sup.* Outre qu'il est aisé de prouver qu'il est égal à tous les Triangles que contient le Polygone, étant de même hauteur que chacun, & sa base étant égale à toutes les bases des autres prises ensemble.

II. Theo-

II. Theoréme.

XXXIV. Par l'analogie du Cercle à un Polygone d'une infinité de côtez, le Cercle est égal au Rectangle du rayon & de la moitié de la circonference : ou au Triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base toute la circonference.

Nous l'avons prouvé par la premiere methode, qui est la Geometrie des indivisibles. On le peut aussi prouver par la voye d'Archimede, en montrant que le Rectangle du rayon & de la moitié de la circonference est plus grand que tout Polygone inscrit au Cercle, & plus petit que tout circonscrit.

Il est plus grand que tout inscrit, parce que l'inscrit, par le Theoréme precedent, est égal au Rectangle de la perpendiculaire du centre au côté & de la moitié du perimetre. Or cette perpendiculaire est plus petite que le rayon du Cercle, puis qu'elle est terminée dans le Cercle; & le perimetre du Polygone inscrit est plus petit que la circonference qui le comprend, par la maxime d'Archimede. V. 6.

Donc le Rectangle du rayon du Cercle & de la moitié de la circonference est plus grand que tout Polygone inscrit.

Et il est plus petit que tout Polygone circonscrit, parce que le Polygone circonscrit est égal au Rectangle du rayon du Cercle, (qui est alors la même chose que la perpendiculaire au côté,) & de la moitié de son perimetre, lequel perimetre est plus grand que la circonference du Cercle, puisqu'il la comprend, selon la même maxime d'Archimede. Donc &c.

III. Theoréme.

XXXV. Les figures regulieres de même espece sont entr'elles en raison doublée de celle de leurs rayons droits.

Car

Car elles sont égales chacune au Rectangle du rayon droit, & de la moitié du perimetre. Or le rayon droit est au rayon droit comme le perimetre au perimetre, par XII. 26. Donc ces Rectangles (auxquels ces figures regulieres sont égales) étant semblables, sont entr'eux en raison doublée de celle du rayon droit, qui est l'un de leurs côtez. (29. *sup.*)

I. Corollaire.

Les Cercles sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs rayons, ou de leurs diametres, ce qui est la même chose. XXXVI.

II. Corollaire.

Les Cercles sont entr'eux comme les Quarrez de leurs diametres. Car les uns & les autres sont en raison doublée de celle de leurs diametres. XXXVII.

IV. Theoréme.

Les Triangles semblables inscrits en des Cercles sont entr'eux en raison doublée des diametres de ces Cercles: ou, ce qui est la même chose, comme les Cercles, ou comme les Quarrez des diametres. XXXVIII.

Car les cordes de divers Cercles qui soûtiennent les angles inscrits égaux, sont entr'elles comme les diametres, par X. 25 & 26.

Donc les côtez de ces Triangles semblables qui soûtiennent les angles égaux, (qui sont ceux qu'on appelle côtez homologues,) sont entr'eux comme les diametres.

Or ces Triangles étant semblables, sont en raison doublée de leurs côtez homologues. (27. *sup.*)

Donc ils sont aussi en raison doublée de ces diametres.

Donc ils sont aussi entr'eux comme les Cercles & comme les Quarrez des diametres.

V. Theoréme.

XXXIX. Les figures semblables inscrites dans les Cercles sont entr'elles en raison doublée des diametres.

Car comme il a été prouvé S. 29. & XIII. 26. ces figures semblables se peuvent resoudre en Triangles semblables, chacun d'une figure à chacun de l'autre, qui seront tous inscrits dans le Cercle.

Donc tous les Triangles d'une figure sont à tous ceux de l'autre, (& par consequent une figure est à l'autre,) comme un des Triangles d'une figure à un semblable de l'autre. Or par le Theoréme precedent ces deux Triangles semblables sont entr'eux en raison doublée des diametres. Donc les figures semblables inscrites dans les Cercles sont entr'elles en raison doublée des diametres. Donc aussi comme les Cercles. 36. *sup.* Donc aussi comme les Quarrez des diametres. 37. *sup.*

I. Probleme.

XL. Decrire sur un côté donné le Parallelogramme égal & équiangle à un Parallelogramme donné.

Soit le Parallelogramme donné *b c d f*. Soit continuée *c d* jusques à *g*, en-sorte que *d g* soit égale au côté donné.

Soit aussi continuée *b f* jusques à ce que *f q* soit égale à *d g*. Soit menée de *q* par *d* une indefinie.

Soit prolongée *b c*, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *r* cette indefinie.

Soit prolongée *q g* jusques en *k*, en sorte que *q k* soit égale à *b r*.

Joignant

Joignant les points *r k*, & prolongeant *f d* jusques en *h*, où elle rencontre *k* :

Le Parallelogramme *d h k g* sera égal & équiangle au donné *b c d f*. (18. *Sup.*)

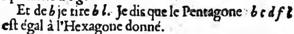
II. Probleme.

Faire une figure égale à une donnée, qui ait moins d'un côté que la donnée. C'est à dire que si la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5, & si elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4 : de sorte que par là on pourra venir jusqu'au Triangle. XLI.

Soit proposé de reduire l'Hexagone *b c d f g h* en un Pentagone qui luy soit égal.

Ayant prolongé *f g*, je tire la ligne *h g*.

Puis de *h* je tire sur *f g* prolongée *h l* parallele à *b g*.



Et de *b* je tire *b l*. Je dis que le Pentagone *b c d f l* est égal à l'Hexagone donné.

Car les Triangles *h l b* & *h l g* sont égaux, parce qu'ils sont sur la même base & entre mêmes paralleles. (6. *sup.*)

Donc ôtant *h l o* commun à l'un & à l'autre : *h o b* demeurera égal à *l g o*, & tout le reste est commun à l'Hexagone & au Pentagone.

On reduira de même le Pentagone *b c d f l* à un Trapéze.

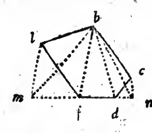
Ayant mené la ligne *b f* : mener de *l* sur *d f* prolongée, *l m* parallele à *b f*.

Puis tirer *b m*.

On prouvera de la même maniere que l'on vient de

 faire

faire; que le Trapéze *b c d m* sera égal au Pentagone *b c d f l*.



Que si de *b* on tire une ligne à *d*,

Et de *c* sur *f d* prolongée de ce coté là, *c n* paralle- le à *b d*:

En tirant *b n*, le Triangle *b m n* sera égal tant au Trapéze *b c d m*, qu'au Pentagone *b c d f l*. Et ainsi l'Hexagone aura été reduit en un Pentagone, & le Pentagone en un Trapéze, & le Trapéze en un Triangle.

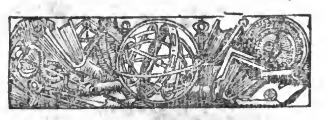
AVERTISSEMENT ET CONCLUSION.

XLII. *Je laisse d'autres Problemes qui sont trés faciles à resoudre par les principes qui ont été établis. Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un essay de la vraye methode qui doit traiter les choses simples avant les composées, & les generales avant les particulieres: je pense avoir satisfait à ce dessein, & avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cét ordre de la Nature, en s'imaginant qu'ils n'avoient autre chose à observer, sinon que les propositions precedentes servissent à la preuve des suivantes: au lieu qu'il est clair, ce me semble, par cét essay, que les elemens de Geometrie étant reduits selon l'ordre naturel, peuvent être aussi solidement demontrez, & sont sans comparaison plus aisez à concevoir & à retenir.*

FIN.

SOLU-

SOLUTION
D'UN DES PLUS CELEBRES
ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE,
APPELLÉ COMMUNÉMENT
LES QUARREZ
MAGIQUES.



SOLUTION
D'UN DES PLUS CELEBRES ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE, APPELLE' COMMUNE'MENT
LES QUARREZ MAGIQUES.

§. 1. *Ce que c'est que ce Probleme.*

AYANT un Quarré de cellules pair ou impair : 1.

Et l'ayant remply de chiffres ou ſelon l'ordre naturel des nombres 1. 2. 3. 4. &c.

Ou de quelqu'autre progreſſion arithmetique que ce ſoit, comme 2. 5. 8. 11. 14. &c.

Diſpoſer tous ces chiffres dans un autre Quarré de cellules ſemblable à celui-là, en ſorte que tous les chiffres de chaque bande ſoit de gauche à droit, ſoit de haut en bas, ſoit même les deux diagonales, faſſent toûjours la même ſomme.

Soient pris pour exemples les Quarrez d'11 pour les impairs, & de 12 pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui sont à la fin de ce Traité.

§. 2. *Considerations sur les Quarrez naturels.*

II. J'APPELLE *Quarrez naturels* ceux où les chiffres sont disposez en progression arithmetique, en commençant par les plus petits.

SUR LES QUARREZ IMPAIRS.

III. DANS le milieu du Quarré impair il y a une cellule qui en est le centre. Le chiffre qui est dans cette cellule soit nommé *centre* & marqué par c.

IV. DE tous les autres chiffres la moitié sont plus petits & les autres plus grands que le centre. Les uns soient appellez simplement *petits* & les autres *grands*.

V. LES cellules autour du centre soient appellées — 1.re *enceinte*.
Autour de la premiere enceinte, — 2.e *enceinte*.
Autour de la seconde enceinte, — 3.e *enceinte*.
Et ainsi de suite.

VI. LES enceintes 1.re 3.e 5.e 7.e 9.e &c. soient appellées *enceintes impaires*.
Les 2.e 4.e 6.e 8.e 10.e &c. *enceintes paires*.

VII. IL est important de considerer dans chaque enceinte où sont les petits chiffres, & où sont les grands.

Les petits sont premierement dans toute la bande d'enhaut, qui est de 3 dans la 1.re enceinte, de 5 dans la 2.e, de 7 dans la 3.e &c.

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts

hauts jusqu'à celui qui est vis-à-vis le centre *inclusivè.*

Troisiémement dans la bande à droit les plus hauts jusqu'à celui qui est vis-à-vis le centre *exclusivè.*

Sur les Quarrez pairs.

Il n'y a point de cellule qui soit au centre. VIII.
Mais on doit prendre pour centre la moitié de la somme que font le premier & le dernier chiffre.

Et cette somme entiere s'appellera 2 *c.*

La moitié des bandes, sçavoir celles qui sont IX.
les plus hautes, contiennent les petits chiffres, & les plus basses les grands.

Les quatre cellules du milieu font la 1.re enceinte. X.

Les cellules autour de ces quatre, la 2.e enceinte.

Celles autour de la seconde, la 3.e enceinte.

Et ainsi de suite.

Les enceintes 1.re 3.e 5.e 7.e 9.e &c. soient aussi XI.
appellées *les enceintes impaires.*

Et les 2.e 4.e 6.e &c. *les paires.*

Les petits chiffres sont, XII.

1. Dans la bande d'enhaut de chaque enceinte.

2. Au côté gauche depuis la bande d'enhaut jusqu'à la bande où commencent les grands chiffres.

3. Et de même au côté droit.

§. 3. PREPARATION.

Le plus grand mystere de la solution de ce Pro- XIII.
bleme consiste à marquer par lettres quelques-uns des petits chiffres de chaque bande.

Quarrez impairs.

Dans toutes les enceintes generalement mar- XIV.
quer

quer le coin à gauche de la bande d'enhaut par *e*.
Le coin à droit de la même bande par *o*.
Le milieu de cette bande par *m*.
La cellule à gauche qui est vis-à-vis le centre par *a*.

XV. MARQUER de plus dans les enceintes paires
Deux cellules dans la bande d'enhaut également distantes, l'une d'*e*, l'autre d'*o*, par les mêmes lettres accentuées :
L'une par *è*.
L'autre par *ò*.
Et la cellule à gauche au dessous d'*e* par *a*.
Et au côté droit celle qui est au dessus de la cellule qui est vis-à-vis le centre par *C*.

DANS LES QUARREZ PAIRS.

XVI. NE rien marquer dans les premiere & seconde enceintes.

XVII. DANS toutes les autres generalement marquer
Le coin à gauche d'enhaut par *e*.
A droit par *o*.
Le plus bas des petits nombres à droit par *a*.
Le plus bas des petits nombres à gauche par *C*.

XVIII. MARQUER de plus dans les enceintes impaires, à commencer par la 3.e (qui est celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut,)

4 cellules dans la bande d'enhaut, deux par { *è*. *ò*.

& deux par { *é*. *ó*.

selon ce qui a été dit *sup.* 15.
A gauche marquer la cellule au dessous d'*e* par *a*.
Et à droit celle au dessus d'*a* par *γ*.

§. 4. MAXIMES

POUR LA DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

DEUX chiffres, l'un *petit*, l'autre *grand*, également distans du centre, & qui se joignent par une ligne passant par le centre, font une somme égale à deux fois le centre. XIX.

QUAND un *petit* chiffre est marqué par une lettre, son grand soit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuscule de la même lettre, quoi qu'elle ne soit pas marquée. XX.

Ainsi *e.* E. font deux fois le centre.

Et de même *α.* A. ou *ϛ.* B. ou *o.* O.

SECONDE MAXIME.

QUATRE chiffres dans la même bande, dont le premier est autant distant du 2.e que le 3.e du 4.e sont en proportion arithmetique. XXI.

Et par conséquent la somme des extremes est égale à la somme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

e. è. :: ∂. o. Donc e. o. = *è. ∂.* XXII.

D'où il s'ensuit que partout où sont ensemble *è. ∂.* ou bien *è ∂.* ou leurs majuscules E. O. on peut supposer, lors qu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'est comme si c'étoit *e. o.* E. O; parce que si l'égalité s'y trouve en supposant que c'est *e. o.* elle ne sera pas troublée en mettant *è. ∂.* en la place de *e. o*; puisque les deux d'une part valent autant que les deux de l'autre.

Semblablement pour les Quarrez impairs en particulier, XXIII.

e. m. :: *m. o.* Donc *e. o.* = *m. m.*

Dans les Quarrez pairs.

XXIV. e. ω. :: ϛ. A. Donc e. A. ≡ ω. ϛ.
Pour trouver A voyez *sup*. 20.

Troisiéme Maxime.

XXV. Lorsque 4 cellules font un Parallelogramme rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres sont en proportion arithmetique. Et par consequent la somme des extremes est égale à la somme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

Dans les Quarrez impairs.

XXVI. e. m. :: α. c. Donc e. c. ≡ m. α.
XXVII. m. o. :: α. c. Donc m. c. ≡ o. α.
XXVIII. ω. m. :: c. ϛ. Donc ω. ϛ. ≡ m c.

Dans les pairs.

XXIX. e. o. :: ϛ. α. Donc e. α. ≡ o. ϛ.
XXX. ω. ϛ. :: o. γ. Donc ω. γ. ≡ ϛ. o.

§. 5. *Methode pour disposer magiquement le Quarré naturel.*

XXXI. Cette methode consiste en fort peu de regles : les unes generales, les autres particulieres ; selon lesquelles il faut transporter les chiffres du Quarré naturel dans le magique.

Pre-

PREMIERE REGLE GENERALE.

IL faut disposer les chiffres par enceintes, ceux d'une enceinte en l'enceinte semblable ; & tout le soin qu'on doit avoir d'abord, est de sçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parce que la situation des *petits* donne celle des *grands*, selon les deux regles suivantes. XXXII.

SECONDE REGLE GENERALE.

QUAND on a placé un *petit* chiffre dans un coin, il faut placer son *grand* dans le coin diagonalement opposé. XXXIII.

Ainsi *a* étant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre A dans le coin droit de la bande d'embas.

TROISIÉME REGLE GENERALE.

HORS les coins, il faut placer les grands vis à vis des petits de la bande opposée. XXXIV.

C'est pourquoy il faut observer de ne mettre jamais deux petits en des bandes opposées vis à vis l'un de l'autre.

COROLLAIRE DE CES REGLES.

LES chiffres étant disposez selon ces regles, XXXV.

Il s'ensuit, 1. Que les chiffres de deux bandes opposées pris ensemble, valent autant de fois *c* qu'il y a de chiffres dans les deux bandes. Car un petit & un grand valent deux fois *c*. Or il y a autant de *petits* que de *grands*. Donc. &c.

IL s'ensuit, 2. Que lors qu'on a prouvé que les chiffres d'une bande apres cette disposition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande est égale à son opposée. XXXVI.

IL s'ensuit, 3. Que quand il y a autant de petits XXXVII.

chiffres dans une bande que dans l'opposée, & que la somme des uns est égale à la somme des autres, c'est une marque assurée que la bande est égale à la bande.

La preuve en est facile sans que je m'arrête à l'expliquer.

Quatriéme Regle generale.

XXXVIII. Il ne faut se mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui sont marquez par des lettres ; car cela fait, le reste se trouve sans peine par cette raison :

Dans la bande d'enhaut, dans quelques Quarrez & quelques enceintes que ce soit, outre les cellules marquées par des lettres,

Ou il ne reste rien :

Ou il reste toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair ; c'est à dire 4. 8. 12. 16. &c.

Et de plus, les chiffres de ces cellules sont toûjours 4 à 4 en proportion arithmetique.

Donc prenant les extremes & les mettant dans une bande, & ceux du milieu dans l'opposée, ils ne troubleront point l'égalité qui y étoit déja par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en est de même des deux côtez droit & gauche. Car les petits chiffres qui restent, (s'il en reste outre les marquez,) sont toûjours en nombre pairement pair, 4. 8. 12. 16. &c. & de 4 en 4 en proportion arithmetique.

Donc comme ci-dessus.

Il n'y a donc plus à se mettre en peine que de disposer les lettres. Ce qui se fait par les regles particulieres.

§. 6.

§. 6. *Regles particulieres pour les Quarrez impairs.*

Il y a deux regles pour ces Quarrez, l'une pour les enceintes impaires, & l'autre pour les paires. XL.

Pour les enceintes impaires.

Au coin gauche de la bande d'enhaut mettre *α*.
Au coin droit de la même bande. *m*.
A la bande d'embas en quelque cellule que ce soit, hors les coins, *e*.
A la bande du côté d'*α*, *o*.



DEMONSTRATION.

Il est requis premierement à demontrer que dans la bande d'enhaut *α*. E. *m*. valent trois fois le centre. D'où il s'ensuivra qu'elle sera égale à la bande d'embas, par 36. *sup*. XLI.

Or (par 26.) $e.c. \equiv \alpha.m.$
Donc $e.c.E. \equiv \alpha.E.m.$
Or $e.c.E. \equiv 3\,c.$ (par 20.)
Donc $\alpha.E.m. \equiv 3\,c.$ Ce qu'il falloit demontrer.

Requis secondement à demontrer que *a. o.* M. valent 3 *c*. D'où il s'ensuivra que cette bande sera égale à l'opposée, par 36. XLII.

Or (par 27.) $\alpha.o. \equiv m.e.$
Donc $m.c.M. \equiv \alpha.o.M.$

Or

Or   *m.c.*M. ≡ 3 *c.* (par 20.)
Donc   *α.o.*M. ≡ 3 *c.*

Pour les enceintes paires.

XLIII. Il suffira de les figurer tout d'un coup.



Demonstration.

XLIV. Requis premierement à demontrer que la bande d'embas M. è. α. ò. E. ≡ 5 *c.* C'est à dire qu'elle vaut ensemble cinq fois le centre.

e m o O Ϭ ω M. è. α. ò. E.

Ce qui se prouve ainsi :

Par 27.   *α.o.* ≡ *m. c.*

Donc   *e.α.o.* ≡ *e.m.c.*

Donc *e.m.c.*M.E. ≡ è. α. ò. M. E. (par 22.)

Or *e.m.c.*M.E. ≡ 5 *c.* (par 20.)

Donc M.è.α.ò.E. ≡ 5 *c.* Ce qu'il falloit demontrer.

XLV. Requis secondement à demontrer que dans la bande droite *m.*O.Ϭ.ω.E. ≡ 5 *c.*

Ce qui se prouve ainsi :

Par 23.   *e.o.* ≡ *m.m.*

Donc

Donc $e.o.c. \equiv m.m.c.$
Or $m.m.c. \equiv m.\omega.\beta.$
Parce que $m.c. \equiv \omega.\beta.$ (par 28.)
Donc $e.o.c. \equiv m.\omega.\beta.$
Donc $e.o.c.E.O. \equiv m.\omega.\beta.E.O.$
Or $e.o.c.E.O. \equiv 5c.$ (par 20.)
Donc $m.O.\omega.\beta.E. \equiv 5c.$ Ce qu'il falloit demontrer.

§. 7. *Pour les Quarrez pairs.*

On laisse à part les deux premieres enceintes, qui ont leur regle particuliere. XLVI.

Pour les autres enceintes impaires.

La disposition s'en figure ainsi : XLVII.



Demonstration.

Requis 1. à demontrer que les six chiffres de la bande d'enhaut dont quatre sont *petits*, & deux *grands* qui viennent de è & ò qu'on a mis en bas, valent six fois le centre. Ce qui se prouve ainsi : XLVIII.

ω F. α. °. O. β.
ε ê
γ ô
è ò

α. A. o. O. e. E. ≡ 6 c. (par 20.)

Or ces six lettres sont égales aux six, ω. E. α. o. O. ϛ.

Car ôtant les mêmes qui se trouvent de part & d'autre, sçavoir α. o. O. E. il ne restera d'un côté que A. e: & de l'autre que ω. ϛ.

Or (par 24.) A. e. ≡ ω. ϛ.

Donc les six lettres ω. E. α. o. O. ϛ. ≡ 6 c.

XLIX. Requis 2. à demontrer que ω. e. γ. ≡ ϛ. è. ò. Car si cela est, les grandes seront aussi égales aux grandes, & le tout au tout, (par 37.)

Supposant donc que è. ò. soient e. o. (*sup.* 22.) & ôtant e & e de part & d'autre, reste d'une part ω. γ. & de l'autre ϛ. o. qui font des sommes égales, (par 30.)

Donc ω. e. γ. ≡ ϛ. è. ò.

Donc la bande est égale à la bande, (par 30.)

Pour les enceintes paires.

L. La disposition en est trés facile, & se figure ainsi:



Demonstration.

LI. Elle est si facile par 22. 29. & 37. que je ne m'amuse pas à l'expliquer.

Cette enceinte se peut encore faire en transposant les coins &c.

§. 8.

§. 8. *Regle particuliere pour la premiere & seconde enceinte des Quarrez pairs.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ces deux enceintes ne sont autre chose que le Quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux sortes de bandes. Quatre qui sont la seconde enceinte, & qu'on peut appeller les bandes *exterieures*. Et quatre autres qui coupent le Quarré, & qu'on peut appeller *transversales*: sçavoir la 2.e & la 3.e de haut en bas. LII.

Et la 2.e & la 3.e de gauche à droit.

Ce qui est cause que ces deux enceintes ne se peuvent pas disposer par les regles de autres, c'est que les 4 chiffres du milieu faisant en divers sens quatre bandes de deux chacune en ligne droite, & deux en diagonale: les bandes droites ne sçauroient faire des sommes égales, mais seulement les diagonales. LIII.

Or ces 16 chiffres se pouvant disposer en tant de manieres que cela est presque incroyable, sçavoir en plus de 20 millions de millions: LIV.

20:922:789:888:000.

Il n'y en a proprement que 16 qui soient magiques, c'est à dire où toutes les bandes fassent des sommes égales, (car je ne compte pas pour differentes dispositions celles qui ne viennent que de la differente situation du même Quarré.)

Et voici comme on les trouve. LV.

Il

Il faut prendre toûjours les chiffres 4 à 4 en cét ordre:

1. Les quatre du dedans ou interieurs.

2. Les quatre coins exterieurs.

3. Les deux du milieu de la bande d'enhaut, avec les deux du milieu de celle d'embas.

4. Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.

Or chacun de ces chiffres pris ainsi 4 à 4 (& qu'on nommera dans la suitte par 1. 2. 3. 4.) peuvent

Ou être laissez en leur même place; ce qui se marquera par *o*.

Ou être transportez en croix S. André; ce qui se marquera par *c*.

Ou directement de gauche à droit; ce qui se marquera par *g*.

Ou directement de haut en bas; ce qui se marquera par *h*.

LVI. SUIVANT ces remarques, & se souvenant de ce que signifient les 4 nombres (1. 2. 3. 4.) & les 4 lettres (*o. c. g. h.*) les deux Tables suivantes feront trouver sans peine les 16 dispositions magiques du Quarré de 4: ou, ce qui est la même chose, des deux premieres enceintes de tous les Quarrez pairs.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1.	*o*	*o*	*o*	*o*	*c*	*c*	*c*	*c*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*o*	*h*	*o*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

IX.

	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.
1.	*g*	*g*	*g*	*g*	*h*	*h*	*h*	*h*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*h*	*o*	*h*	*o*	*c*	*g*	*c*	*g*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

De ces 16 diſpoſitions magiques du Quarré de 4 il y en a deux, ſçavoir la 1.re & la 6.e, où on ne change que 8 chiffres. LVII.

Deux, ſçavoir la 11.e & la 16.e où on les change tous 16.

Et douze où on en change 12.

Voici un exemple de la 6.e diſpoſition, & un autre de la 16.e On laiſſe à trouver les autres. LVIII.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

DEMONSTRATION.

CHAQUE bande tant exterieure que tranſverſale du Quarré de 4, (ou du Quarré compoſé LIX.

des

des 2 premieres enceintes de tous les Quarrez pairs,) est de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par conséquent la somme des extremes est égale à la somme des moyens.

Soit donc, par exemple, la somme des extremes de la bande d'enhaut appellée *b*: la somme des moyens qui lui est égale pourra être aussi appellée *b*, & ainsi toute la bande sera *b*+*b*.

Et par la même raison la bande d'embas pourra être *f* +*f*.

Cela étant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1.re en transposant les extremes de l'une à l'autre sans changer les moyens. Car alors l'une deviendra *f*+*b*;

Et l'autre *b*+*f*; & ainsi seront égales.

La 2.e en transposant les moyens sans changer les extremes. Car alors l'une deviendra *b* +*f*; & l'autre *f* +*b*; & ainsi seront encore égales.

Il ne faut qu'appliquer cecy à chacune de ces 16 dispositions, & l'on verra que les transpositions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. *Divers moyens de varier les Quarrez Magiques.*

De ces moyens j'omets ceux qui sont trop faciles à trouver, & je n'en marqueray que deux qui sont plus importans, & qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez des Quarrez magiques.

PREMIER MOYEN.

1 x. Nous avons supposé qu'on transporteroit les chiffres

chiffres de la premiere enceinte du Quarré naturel dans la premiere enceinte du Quarré magique; & ceux de la 2.e dans la 2e ; & de la 3.e dans la 3.e &c. Mais cela n'est pas necessaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il suffit de ne les transporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque quil soit impaire, comme de la 5.e à la 1.re ; & d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6.e à la 4.e

SECOND MOYEN.

Et pour tous les autres chiffres non marquez de lettres, on les peut transporter de quelque enceinte que ce soit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvû qu'on en prenne quatre ensemble qui soient en proportion arithmetique, & qu'on ait soin de mettre les extremes dans une bande, & les moyens dans la bande opposée. LXI.

CONCLUSION.

Je pense pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'est pas possible de trouver une methode plus facile, plus abregée & plus parfaite pour faire les Quarrez magiques, qui est un des plus beaux Problemes d'Arithmetique. LXII.

Ce qu'elle a de singulier, c'est 1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on est toûjours assuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands Quarrez ne sont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonstration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode

de est si generale, que sans y rien changer on pourroit resoudre sans aucune peine par la même voie cét autre Problême qui paroist encore plus merveilleux :

Ayant mis dans un Quarré naturel tous les nombres que l'on voudra en progression geometrique, comme 1. 2. 4. 8. 16. &c. les disposer de telle sorte dans un Quarré semblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres fassent une somme égale à celle que font les nombres de toute autre bande multipliez aussi les uns par les autres.

En voicy un exemple dans le Quarré de 3.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

FIN de l'Explication des Quarrez Magiques.



QUARRÉ NATUREL DE XI.

1 e	2	3	4	5	6 m	7	8	9	10	11 o
12	13 e	14 è	15	16	17 m	18	19	20 o	21 o	22
23	24 ω	25 e	26	27	28 m	29	30	31 o	32	33
34	35	36	37 e	38 è	39 m	40 o	41 o	42	43	44
45	46	47	48 ω	49 e	50 m	51 o	52 β	53	54 β	55
56 α	57 α	58 α	59 α	60 α	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

N.° 2. Pag. 480.

QUARRÉ MAGIQUE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

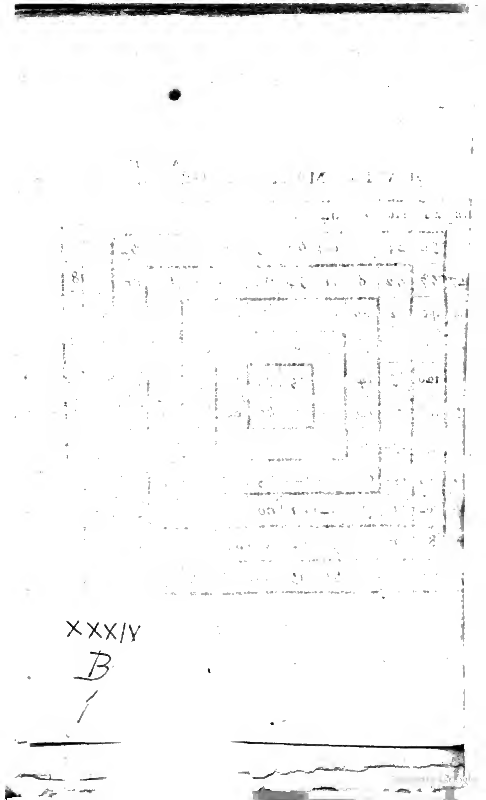
QUARRÉ NATUREL DE XII.

1 e	2 e	3	4	5	6	7	8	9	10	11 o	12 o
13	14 e	15 e	16 ê	17	18	19	20	21 ô	22 o	23 o	24
25	26 ω	27 e	28 e	29	30	31	32	33 ô	34 o	35	36
37	38	39	40 e	41 ê	42 ê	43 ô	44 ô	45 o	46	47	48
49	50	51	52 ω	53	54	55	56	57 γ	58	59 γ	60
61 β	62 β	63 β	64 β	65	66	67	68	69 α	70 α	71 α	72 α
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

N.° 4. Pag. 480.

QUARRÉ MAGIQUE DE XII.

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27


XXXIV
B
1

